

Simulation elektromagnetischer Wellen in relativistischen Plasmen mit der Particle-In-Cell Methode

von

Stefan Bollmann

Diplomarbeit in Physik

vorgelegt der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

Institut für Theoretische Physik A

im Juni 2008

Lehr- und Forschungsgebiet Laserphysik

Prof. Dr. H.-J. Kull

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Plasmen	4
1.2	Relativistische Laserplasmen	5
1.3	Problemstellung	5
1.4	Maxwell-Gleichungen und Lorentzkraft	6
2	Laserpulse in der linearen Optik	8
2.1	Methode der Fouriertransformation	8
2.2	Grundgleichungen	8
2.3	Unbegrenztes Medium	11
2.4	Begrenztes Medium	11
2.5	Pulsmodulationen	12
2.6	Numerische Berechnung	14
2.7	Vergleich mit analytischen Ergebnissen	14
3	Particle-In-Cell Methode	24
3.1	Normierungen	24
3.2	Wahl der Felder	26
3.3	Vlasov-Gleichung	27
3.4	PIC	28
3.5	Transversale und longitudinale Wellen	30
3.5.1	Explizites Verfahren zur Lösung der Wellengleichung	32
3.5.2	1d Berechnung des elektrischen Feldes	36
3.5.3	Teilchenbewegung im Vakuum	38
4	Ausbreitung relativistischer Laserpulse	50
4.1	Kurzer, schwacher Puls	53
4.2	Anregung von Plasmawellen	54

5	Zusammenfassung	62
6	Ausblick	63

1 Einleitung

1.1 Plasmen

Als Plasma bezeichnet man ein wenigstens teilweise ionisiertes Gas. Die Bezeichnung rührt von einer Arbeit Irving Langmuirs, der über elektronische Bauteile, deren Funktion auf ionisierten Gasen beruht, geforscht hat [14]. Bei der Arbeit erkannten die Forscher und Ingenieure von Langmuirs Arbeitsgruppe einen Zustand bei Entladungsvorgängen mit Quecksilberdampf, der sich immer wieder einstellte und interessante Formen hervorbrachte. Dieser Zustand des Quecksilbers - eine Art Flüssigkeit, in der sich Elektronen und Ionen schnell bewegen - erinnerte Langmuir an die Bewegung von Blutplasma, welches rote und weiße Blutkörperchen transportiert.

Dieser Zustand ist also schon lange bekannt und viele industrielle Anwendungen beruhen darauf. Als Beispiel ist hier das Schneiden von Metallen mittels Lasern zu nennen, bei dem Metall von Laserlicht so stark erhitzt wird, dass es entweder direkt in die Plasma-phase übergeht oder es vor dem Übergang in diese Phase zuerst schmilzt und verdampft. Durch den letzten Sachverhalt erkennt man auch, warum Plasma vierter Aggregatzustand genannt wird. Wenn man beim Erhitzen von Festkörpern mit den Phasen fest, flüssig und gasförmig die ersten drei Aggregatzustände durchlaufen hat, erreicht man bei noch höheren Temperaturen den vierten, Plasma[7]. Aber auch sonst kann jeder Mensch schon in der Natur Plasmen in Form von Blitzen beobachten. In der Natur kommt der Plasmazustand in der Ionosphäre, der Sonne und auch bei Blitzen vor.

Man kann schon an den wenigen genannten Beispielen erkennen, dass die Plasmaforschung in sehr vielen Bereichen eine große Rolle spielt. In der Physik ist das zum Beispiel Fusionsforschung, die sich dadurch auszeichnet, dass ionisierte Teilchen unter hohen Temperaturen und Drücken, also mit großer Dichte, so stark zusammengepresst werden, dass sie zu neuen Teilchen verschmelzen und Energie dabei frei wird. Dabei müssen die positiv geladenen Kerne sich wenigstens so nahe kommen, dass die Coulombabstoßung der positiven Ladungen der Kerne überwunden wird. Sie müssen auf Abstände unter 10^{-15}m [10] gebracht werden. Dabei ist unter anderem ein Verständnis der Teilchenbe-

wegung sehr wichtig, damit die Materialien im Reaktor möglichst lange halten.

1.2 Relativistische Laserplasmen

In der Plasmaphysik wird die Wechselwirkung zwischen Laserpulsen und Plasma auch zur Beschleunigung von Elektronen genutzt [13], [6]. Die Beschleunigung von Elektronen im Laserlicht ist zuallererst eine Drift, welche durch die E- und B-Felder des Lichtes geschieht. Im Plasma aber werden unter anderem so genannte 'Wake-fields' erzeugt, also Felder in denen Plasmateilchen beschleunigt werden, indem sie einem Laserpuls nachlaufen. Dabei werden Laser hoher Intensität bis zu $10^{20} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$ benutzt. Um diese Intensitäten zu erreichen benutzt man u.a. die "Chirped Pulse Amplifikation" [20], [16]. Für die Wake-field Beschleunigung überträgt das Laserlicht den Elektronen so viel Energie, dass diese aus dem Puls erst heraus beschleunigt werden, während die schweren Ionen an dem Ort zurückbleiben. Während sich der Laserpuls weiter durch das Plasma bewegt, ziehen die zurückgebliebenen Ionen dann Elektronen hinter dem Laserpuls an und so werden die nachkommenden Elektronen hinter dem Puls beschleunigt. Da durch diese ganzen Bewegungen der Ladungsträger auch starke Ströme entstehen, die ihrerseits wieder Felder erzeugen, wird die Bewegung der Teilchen schnell chaotisch. Dazu gibt es viele Untersuchungen theoretischer [21] und experimenteller Natur [15]. Sehr hilfreich ist für diese Experimente die Entwicklung der Lasersysteme.

1.3 Problemstellung

Erstes Ziel dieser Diplomarbeit ist es ein Particle In Cell Programm zu erstellen, mit dem man Wechselwirkungen von ebenen Wellen, die senkrecht auf eine Plasmaschicht einfallen, simulieren kann. Dabei sollen die Wechselwirkungen zwischen Laserstrahlung und Plasma physikalisch erklärt werden.

Dabei sollen von der linearen Optik aus die Dispersionsbeziehungen des Plasmas bis hin zum relativistischen Regime untersucht werden. Die Gruppengeschwindigkeit von Laserpulsen in linearen Medien soll zuerst untersucht und danach der Übergang zur nichtlinearen Optik relativistischer Plasmen gemacht werden.

Um letztendlich die Phänomene bei der Wechselwirkung zwischen elektromagnetischen Wellen und Plasmen zu verstehen, sollen erst einmal Phänomene bei kleinen Intensitäten

der Laserstrahlung verstanden werden. Da dabei die Ladungen nicht so stark beschleunigt werden, kann man nichtrelativistisch rechnen und in diesem Bereich sind bei einem Plasma die Zusammenhänge der linearen Optik anwendbar. Da für die lineare Optik die Fouriertransformation eine geeignete Technik darstellt Propagation von Licht in Medien zu beschreiben, wird diese Technik - nach einer Vorstellung der grundlegenden Gleichungen der gesamten Diplomarbeit in diesem Kapitel - in Kapitel 2 erklärt. Es wird ein Programmcode beschrieben, der Pulspropagationen in Plasmen berechnet. Weiterhin werden numerische Ergebnisse auch mit Analytischen verglichen.

Um die Bewegung von Teilchen auch bei hohen Geschwindigkeiten, die nahe der Lichtgeschwindigkeit liegen können, richtig wiederzugeben, muss relativistisch gerechnet werden. Eine im Gegensatz zur starken Anregung vom Plasma noch einfach zu analysierende Bewegung im elektromagnetischen Feld stellt die Bewegung einer Testladung im Vakuum dar. Außerdem soll ein Programm geschrieben werden, dass auch nichtlineare Phänomene eines Plasmas simulieren kann. Deshalb wird in Kapitel 3 ein Verfahren dafür, das Particle-in-Cell (PIC) Verfahren, erklärt. Dann wird die Bewegung einer Ladung im vorgegebenen elektromagnetischen Feld damit zu Testzwecken berechnet. In Kapitel 4 werden schließlich Ergebnisse der Anregung von Plasmen mit monochromatischen, ebenen, linear polarisierten Wellen präsentiert und diskutiert.

1.4 Maxwell-Gleichungen und Lorentzkraft

Da während der gesamten Diplomarbeit die Ausbreitung von elektromagnetischen Felder und die Bewegung von Ladungen im elektromagnetischen Feld analysiert wird, gebe ich hier einmal die wirklich grundlegenden Gleichungen dafür an. Dies sind einerseits die Maxwellgleichungen und andererseits die Lorentzkraft, mit der die Bewegung der Teilchen bestimmt wird.

Die Maxwellgleichungen mit dem elektrischen Feld \vec{E} und der magnetischen Flussdichte \vec{B} sind

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial ct} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial ct} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (1.2)$$

Hierbei bezeichnen c , \vec{j} bzw. ρ die Lichtgeschwindigkeit, eine externe Strom- und Ladungsdichte. In dem Fall einer Plasmawelle werden die Ladung und die Stromdichte von

den Elektronen und Ionen im Plasma gebildet. Kombiniert man die beiden inhomogenen Maxwellgleichungen miteinander, so folgt direkt, wenn man die erste Gleichung in (1.1), das Gauß'sche Gesetz nach der Zeit und die zweite Gleichung in (1.2) nach dem Ort ableitet, mit

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.3)$$

die Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik. Die beiden homogenen Gleichungen erlauben mit

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial ct} \vec{A} - \nabla \phi \quad (1.4)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.5)$$

die Einführung des Vektorpotentials \vec{A} und des elektrischen Potentials ϕ . Mit diesen beiden Definitionen kann man dann Wellengleichungen für die Potentiale herleiten. Dafür setzt man (1.4) und (1.5) jeweils in die inhomogenen Maxwellgleichungen ein. Man erhält

$$0 = -\Delta \vec{A} + \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} \vec{A} + \nabla \left(\frac{\partial}{\partial ct} \phi + \nabla \cdot \vec{A} \right) \quad (1.6)$$

und

$$4\pi\rho = -\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial(ct)}\nabla\cdot\vec{A}. \quad (1.7)$$

Wählt man hier die Lorentzbedingung

$$0 = \frac{\partial}{\partial ct} \phi + \nabla \cdot \vec{A} \quad (1.8)$$

so werden die Gleichungen entkoppelt und es folgen

$$\Delta \vec{A} - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (1.9)$$

und

$$\Delta\phi - \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}\phi = -4\pi\rho. \quad (1.10)$$

Dies sind die Wellengleichungen für die Potentiale.

Schließlich lautet die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.11)$$

2 Laserpulse in der linearen Optik

Für die Analyse der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Medien innerhalb der linearen Optik wird in diesem Abschnitt die Methode der Fouriertransformation angewandt. Dabei wird das Verhalten verschiedenartiger Pulsformen beim Eintritt und der Ausbreitung in Medien untersucht. Bei der Ausbreitung gibt es Phänomene wie Pulsverbreiterung und Vorläufer.

2.1 Methode der Fouriertransformation

Laserpulse können bei der Fouriertransformation als Überlagerung monochromatischer Wellen dargestellt werden. Durch die numerische Methode der schnellen Fouriertransformation kann man die dabei auftretenden Fourier-Integrale effizient berechnen.

Es werden analytische Lösungen von Pulsen unterschiedlicher Länge mit numerischen Ergebnissen verglichen.

2.2 Grundgleichungen

Die Fouriertransformation ist definiert durch

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \quad (2.1)$$

mit einer auf der gesamten reellen Achse ($-\infty < t < \infty$) definierten, absolut integrierbaren Funktion $f(t)$, also

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)| < \infty. \quad (2.2)$$

Die Umkehrtransformation ist definiert durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (2.3)$$

Bei numerischen Berechnungen bzw. Simulationen werden Funktionen mit diskreten Funktionswerten in einem endlichen Zeitintervall transformiert. Dafür wird benutzt, dass man periodische Funktionen analog mit diskreten Frequenzen und Fourierkoeffizienten darstellen kann, als

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m e^{-im\omega t} \quad \hat{f}_m = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{im\omega t}. \quad (2.4)$$

Hierbei bezeichnet T die Periode der Funktion und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ist die Kreisfrequenz der Schwingung. Dann sind $m\omega$ die Frequenzen der Oberschwingungen zu ω mit einer ganzen Zahl m .

Bildet man die Rotation der homogenen Gleichung in (1.1) und setzt dann dort (1.2) ein, so ergibt das

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}. \quad (2.5)$$

Dies ist die Wellengleichung für elektrische Felder, die nur von z, t abhängen. Im folgenden werden solche Felder behandelt und das anhand einer Komponente des E-Feldes. Die Verallgemeinerung auf alle Komponenten des elektrischen Feldvektors \vec{E} ist direkt dadurch gegeben, dass die Wellengleichung für alle Komponenten einzeln gilt.

Es soll jetzt Wellenausbreitung in Materie beschrieben werden. In der Materie sollen keine externen Ladungen vorhanden sein $\Rightarrow \rho, \vec{j} = 0$. Sei $E(z, t)$ das Feld eines Pulses mit endlicher Pulsdauer, der für große Zeiten hinreichend schnell abklingt. Dann gilt

$$\partial_{ct}^2 \hat{E}(t) = -\omega^2 \hat{f}(\omega). \quad (2.6)$$

Dies folgt direkt aus der Fouriertransformation, beim partiellen Integrieren sind die Funktionswerte an den Rändern laut Voraussetzung null. Um auch für alle z absolut integrierbar zu sein, wird bei der Propagation des Pulses im Medium eine Dämpfung berücksichtigt. Diese soll so sein, dass das zeitliche Abklingverhalten hinreichend schnell verläuft.

Bildet man also analog zur Fouriertransformation in der Zeit auch noch die Transformation im Ort von der Wellengleichung des elektrischen Feldes, so ergibt dies

$$0 = \partial_z^2 \hat{E}(z, \omega) + k^2(\omega) \hat{E}. \quad (2.7)$$

Hierbei wird

$$E(z, t) = E(t)e^{ik(\omega)z} \quad (2.8)$$

$$k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega) \quad (2.9)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}n^2(\omega). \quad (2.10)$$

benutzt. Es sind dabei die Wellenzahl $k(\omega) = \frac{\omega}{c}n(\omega)$ und der komplexe Brechungsindex des Mediums $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ eingeführt worden.

Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung mit $k(\omega) > 0$ ist

$$\hat{E}(z, \omega) = \hat{E}^+(\omega)e^{ik(\omega)z} + \hat{E}^-(\omega)e^{-ik(\omega)z} \quad (2.11)$$

mit ortsunabhängiger Amplitude $E^\pm(\omega)$. Um jetzt einen positiven Energiestrom zu beschreiben wird $\Re\{n(\omega)\} > 0$ gewählt und es folgt letztlich

$$E(z, t) = \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{E}^\pm(\omega) e^{\pm ik(\omega)z - i\omega t}. \quad (2.12)$$

Dies stellt das komplexe elektrische Feld als Summation über einen in positive z-Richtung ausbreitenden Teil (" + ") und einen in negative Richtung ausbreitenden Teil (" - ") dar. Da die physikalischen Felder reell sind, definiert man

$$\varepsilon^\pm(z, t) = \Re\{E^\pm(z, t)\}. \quad (2.13)$$

Diese Definition in (2.12) eingesetzt ergibt ähnliche Zusammenhänge wie schon beim komplexen elektrischen Feld, nur mit dem reellen Feld als Parameter. Es ist

$$\varepsilon(z, t) = \varepsilon^+(z, t) + \varepsilon^-(z, t) \quad (2.14)$$

mit

$$\varepsilon^\pm(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{\varepsilon}^\pm(\omega) e^{\pm ik(\omega)z - i\omega t}, \quad (2.15)$$

$$\hat{\varepsilon}^\pm(\omega) = \frac{1}{2} \left[\hat{E}^\pm(\omega) + \hat{E}^{\pm*}(-\omega) \right]. \quad (2.16)$$

Auch hier sieht man durch partielle Ableitung von ε nach z , dass \pm die sich in positive bzw. in negative Richtung fortpflanzenden Wellen sind.

2.3 Unbegrenztes Medium

Gibt man in einem unbegrenzten Medium bei $z = 0$ das elektrische Feld und seine Normalenableitung mittels

$$E(z, t)|_{z=0} = F(t) \quad (2.17)$$

und

$$\partial_z E(z, t)|_{z=0} = G(t) \quad (2.18)$$

vor, so folgt durch Fouriertransformation

$$\hat{E}(0, \omega) = \hat{E}^+(\omega) + \hat{E}^-(\omega) = \hat{F}(\omega) \quad (2.19)$$

$$\partial_z \hat{E}(\omega) = ik(\omega) [\hat{E}^+(\omega) - \hat{E}^-(\omega)] = \hat{G}(\omega) \quad (2.20)$$

Dividiert man die letzte Gleichung durch $ik(\omega)$ und addiert diese dann zu (2.19), ergibt das

$$\hat{E}^+(\omega) = \frac{1}{2} \hat{F}(\omega) + \frac{1}{2ik(\omega)} \hat{G}(\omega). \quad (2.21)$$

Wird von (2.19) subtrahiert, so folgt

$$\hat{E}^-(\omega) = \frac{1}{2} \hat{F}(\omega) - \frac{1}{2ik(\omega)} \hat{G}(\omega). \quad (2.22)$$

Dies ist die vollständig bestimmte Lösung der linearen Wellengleichung in einem homogenen Medium mit der Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\omega)$. Die beiden Gleichungen geben an, wie die Lösung (2.12) unter den gegebenen Randbedingungen bestimmt ist. Die beiden Lösungen geben auch Ausbreitung in beide Raumrichtungen an. Man kann sich das auch so vorstellen, dass sich gerade zum Zeitpunkt t am Ort $z = 0$ zwei gleiche Pulse, die in entgegengesetzte Richtung propagieren, gerade genau überlagern.

2.4 Begrenztes Medium

Nun wird der Fall der Pulsausbreitung in eine Richtung untersucht. Hierbei reicht eine der beiden Vorgaben der Randbedingung (2.18).

Ohne Grenzfläche Für die Ausbreitung von $z = 0$ nach $z > 0$ bei Vorgabe von $F(t)$ ist $\hat{E}^-(\omega) = 0$ und demnach

$$\hat{E}^+(\omega) = \hat{F}(\omega). \quad (2.23)$$

Allgemein kann man auch die Normalenableitung $\frac{\partial}{\partial z}E(z, t)|_{z=0} = G(t)$ vorgeben und so die Bedingung für Pulsausbreitung in positive Richtung vorgeben.

Mit Grenzfläche Gibt man das Feld nicht an der Grenzfläche vor, sondern betrachtet einen bei $z < 0$ einlaufenden Puls, der an der Grenzfläche teilweise reflektiert und transmittiert wird, so müssen für das Feld und seine Normalenableitung an der Grenzfläche stetig sein.

$$C^+(z=0, t) + C^-(z=0, t) = E^+(z, t) \quad (2.24)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}C^+(z, t) + \frac{\partial}{\partial z}C^-(z, t) \right)_{z=0} = \frac{\partial}{\partial z}E^+(z, t)|_{z=0} \quad (2.25)$$

Hier sind C^+ , C^- und E^+ die Felder der einlaufenden, reflektierten und transmittierten Welle. Die Fouriertransformation liefert von der Form ähnliche Gleichungen im Frequenzraum. Diese Gleichungen sind

$$\hat{E}^+(\omega) = \hat{C}^+(\omega) + \hat{C}^-(\omega) \quad (2.26)$$

und

$$ik(\omega)\hat{E}^+(\omega) = i\frac{\omega}{c} \left[\hat{C}^+(\omega) - \hat{C}^-(\omega) \right]. \quad (2.27)$$

Nun sind $C^\pm(\omega)$ sind die Amplituden der einlaufenden bzw. reflektierten Wellen. Man kann aus diesen beiden Amplituden die der transmittierten Welle $\hat{E}^+(\omega)$ berechnen. Dafür multipliziert man (2.27) mit $-i\frac{c}{\omega}$ und addiert diese Gleichung zu (2.26)

$$\hat{E}^+(\omega) = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon(\omega)}} \quad (2.28)$$

2.5 Pulsmodulationen

Breitet sich ein Puls in einem Medium aus, so wird seine Amplitude und Phase im Allgemeinen moduliert. Diese Amplituden- und Phasenmodulation können durch eine

komplexe Amplitude $E_0(z, t) = A(z, t)e^{-i\phi(z, t)}$ dargestellt werden. $A(z, t)$ kennzeichnet den Betrag und $\phi(z, t)$ die Phase der Amplitude. Behandelt man das Problem eines sich in positive Richtung ausbreitenden Pulses, so besteht das elektrische Feld auch nur aus der +-Lösung $E(z, t) = E^+(z, t)$. Man kann dafür

$$E(z, t) = E_0(z, t)e^{iKz - i\Omega t} \quad (2.29)$$

mit dem dazugehörigen Realteil

$$\varepsilon(z, t) = A(z, t) \cos(Kz - \Omega t - \phi(z, t)) \quad (2.30)$$

schreiben. Hier wurde eine Trägerwelle eingeführt, die durch die Frequenz Ω und einer dem Realteil der Wellenzahl im Medium entsprechenden Wellenzahl $K = \Re\{k(\Omega)\}$ charakterisiert ist. Die Bezeichnung für $\pm A(z, t)$ ist Einhüllende oder Envelope, da das reelle Feld (2.30) zwischen den beiden Beträgen der Amplitude oszilliert.

In Gleichung (2.30) erkennt man, dass man eine Frequenz der Schwingung definieren kann als

$$\Omega_c(z, t) = \Omega + \partial_t \phi(z, t). \quad (2.31)$$

Diese ist im allgemeinen Zeitabhängig und deren zeitliche Änderung

$$\partial_t \Omega_c(z, t) = \partial_z^2 \phi(z, t) \quad (2.32)$$

wird als Chirp bezeichnet.

2.6 Numerische Berechnung

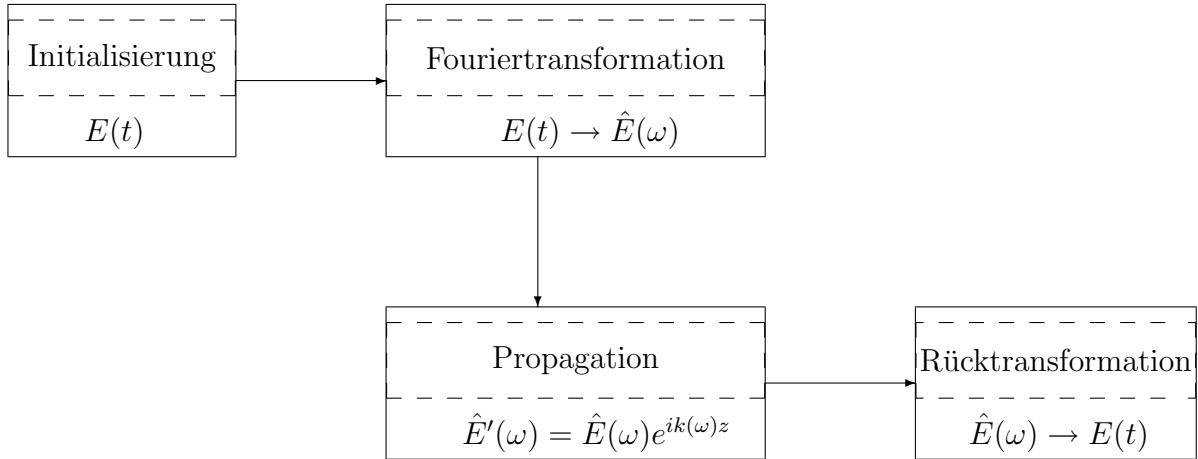


Abbildung 2.1: Dies ist die Darstellung des Programmlaufs. Nach der Vorgabe der Form der elektromagnetischen Welle wird eine Fouriertransformation in den Frequenzraum vorgenommen. Multiplikation mit $\exp(ik(\omega)z)$ und Fourierrücktransformation in den Ortsraum ergibt den propagierten Puls.

Für die Simulation von Pulspropagationen mit der Fouriemethode wird nun der in Abbildung 2.1 veranschaulichte Algorithmus benutzt. Zuerst werden die Randbedingungen für begrenzte Medien (s. Abschnitt 2.4) bzw. unbegrenzte (s. Abschnitt 2.3) vorgegeben, damit ist das Anfangsfeld bekannt. Außerdem wird die Einhüllende des Pulses bestimmt. Von den Daten wird eine schnelle Fouriertransformation gemacht. Dann wird für die Propagation des Pulses das fouriertransformierte Feld mit $e^{ik(\omega)z}$ multipliziert. Die Wellenzahl $k(\omega)$ ist aus (2.10) und z ist die Propagationsstrecke. Eine Rücktransformation liefert dann das propagierte Feld.

2.7 Vergleich mit analytischen Ergebnissen

Da man bei Gauß-Pulsen in einem schwach dispersiven Medium die Fouriertransformationen noch näherungsweise analytisch behandeln kann, werden hier Beispiele der numerischen Lösung mit der Analytischen verglichen. Es wird auch gezeigt, dass die analytische Lösung bei stark dispersiven Medien nicht gilt.

Ausbreitung von Gauß-Pulsen

Das Medium besitze die Dispersionsrelation

$$k^2 = \omega^2 - \omega_p^2. \quad (2.33)$$

Dabei bezeichnet $\omega_p^2 = \frac{4\pi n_{e0} e^2}{m_e}$ die Plasmafrequenz. Damit ist

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (2.34)$$

Zuerst wird das Problem einer nach $z > 0$ propagierenden Welle mit Anregung bei $z = 0$ betrachtet (s. 2.4). Die gewählte Anregung

$$E(0, t) = e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} \cdot e^{-i\Omega t} \quad (2.35)$$

hat zwar keinen definierten Anfangs- bzw. Endpunkt, wird aber durch $N = \Omega \cdot \tau$, $\Omega \Delta t = 2\pi N$ so festgelegt, dass innerhalb der halben Pulsbreite ($t = \frac{\Delta t}{2}$) die Feldstärke um einen Faktor $7 \cdot 10^{-3}$ abgenommen hat.

Die Fouriertransformierte von (2.35) nach (2.1) ist wegen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

$$\hat{E}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\tau^2(\delta\omega)^2} \tau \quad (2.36)$$

mit

$$\delta\omega = \omega - \Omega. \quad (2.37)$$

Für einen um die Strecke z propagierten Puls muss die Rücktransformation (2.3)

$$E(z, t) = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\frac{1}{2}\tau^2(\delta\omega)^2 - ik(\omega)z} \quad (2.38)$$

berechnet werden. Für überdichte Plasmen gilt $\omega < \omega_p$. Dort ist die Wellenzahl $k(\omega)$ reell. Entwickelt man diese um das Maximum der Gauß-Funktion, so ergibt sich bis zur zweiten Ordnung

$$k(\omega) \approx k(\Omega) + k'(\Omega)\delta\omega + \frac{1}{2}k''(\Omega)(\delta\omega)^2 \quad (2.39)$$

$$= K + V_g^{-1}\delta\omega + \frac{1}{2}k''(\delta\omega)^2 \quad \text{mit} \quad V_g = \frac{1}{k'(\Omega)} \quad (2.40)$$

mit den Ersetzungen $K = k(\Omega)$ und $V_g = \frac{1}{k'(\Omega)}$. Mit den zusätzlichen Definitionen

$$q = \sqrt{1 + i \frac{z}{L}}, \quad L = \frac{\tau^2}{-k''(\Omega)} \quad (2.41)$$

folgt

$$E(z, t) = q^{-1} \cdot e^{-\frac{(t - \frac{z}{V_g})^2}{2\tau^2 q^2}} \cdot e^{iKz - i\Omega t} \quad (2.42)$$

$$= E_0(z, t) \cdot e^{iKz - i\Omega t}. \quad (2.43)$$

Dies beschreibt also wieder einen Gaußpuls mit Trägerfrequenz Ω und Wellenzahl der Trägerwelle K . Die Einhüllende $E_0(z, t)$ wird durch

$$E_0(z, t) = q^{-1} \cdot e^{-\frac{(t - \frac{z}{V_g})^2}{2\tau^2 q^2}} \quad (2.44)$$

beschreiben.

Es sind nun mehrere Berechnungen gemacht worden, um die Propagation von Gauß-Pulsen zu simulieren. Abbildung 2.2 zeigt an einem Beispiel wie der Anfangspuls initialisiert ist und den Puls nach einer Propagation um 80 Wellenlängen. Mit $\omega_p^2 = \frac{3}{4}\omega^2$ sind die Parameter des Pulses also $\frac{V_g}{c} = \frac{1}{2} = n$ und $L = 42.5\lambda$. Man kann sehr gut erkennen, dass sich der Puls mit der Gruppengeschwindigkeit ausbreitet, auch die Propagationslängen stimmen gut überein.

In Abbildung 2.3 sind die analytischen Ergebnisse von mit jeweils einem Puls der Länge von $N = 80\lambda$ bzw. 5λ gegen die mittels der numerischen Fouriertransformation berechneten dargestellt. In der ersten Grafik erkennt man, dass die analytische Lösung in einem Medium mit $\frac{\omega_p^2}{\Omega^2} = \frac{3}{4}$ gut übereinstimmt. Der Puls braucht doppelt so lange für die Strecke als im Vakuum, da bei dieser Plasmafrequenz $n = \frac{1}{2}$ gilt. Der zweite Plot, für den eine Propagationslänge von 100λ gerechnet worden ist, zeigt, dass für kurze Pulse die hergeleitete analytische Lösung versagt. Dies liegt an der Entwicklung der Wellenzahl, die bis zu dieser Ordnung bei solchen Pulsen zu ungenau ist.

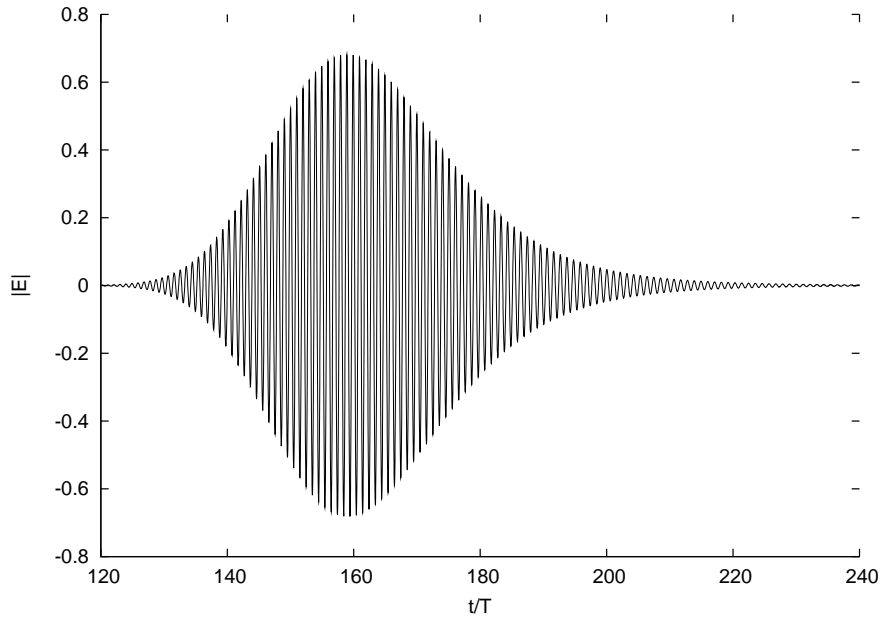
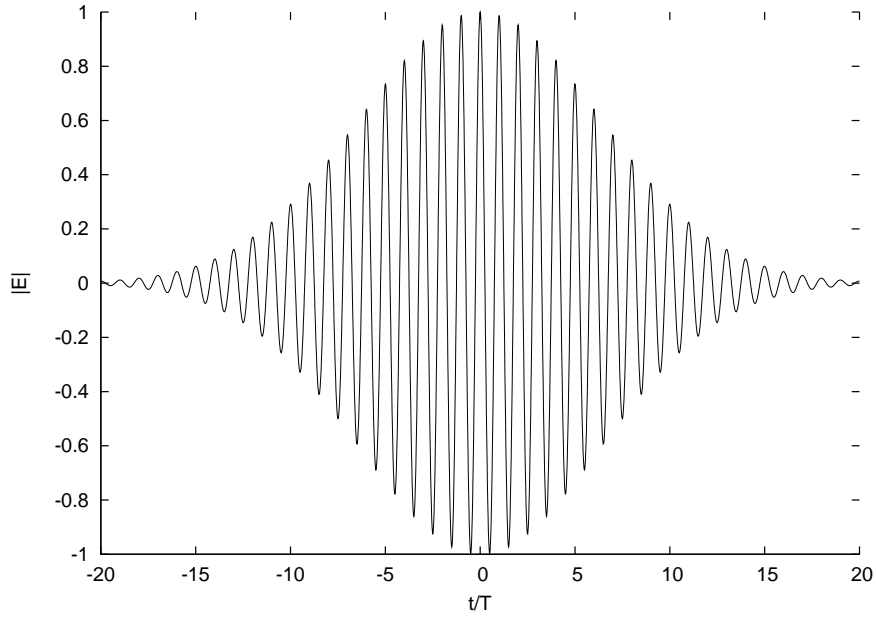


Abbildung 2.2: Dargestellt ist ein Gauß-Puls mit $N = 40$, $\frac{\omega_p^2}{\Omega^2} = \frac{3}{4}$, $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ nach verschiedenen Propagationslängen (a) $z=0$, (b) $z=80\lambda$. Der Zeitnullpunkt liegt mittig im Puls.

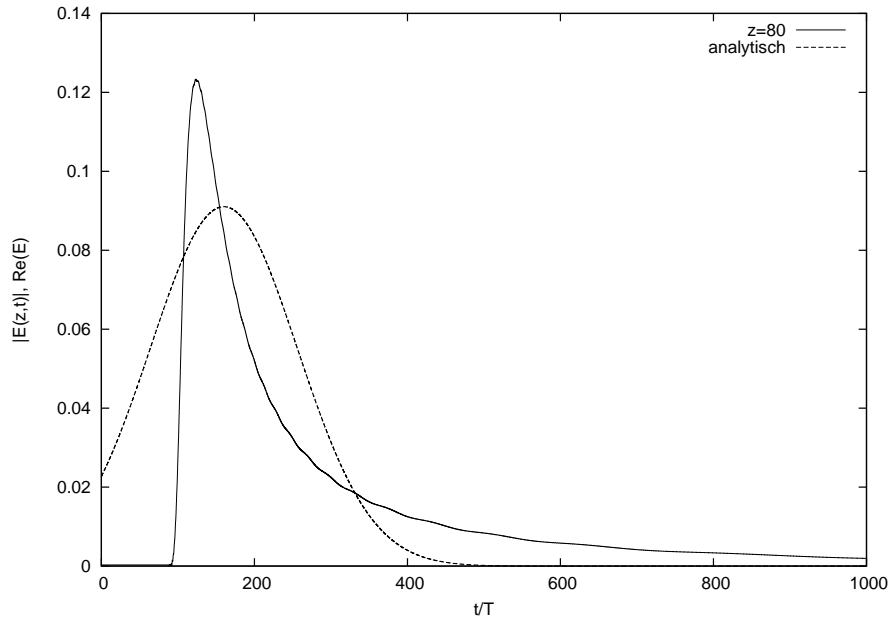
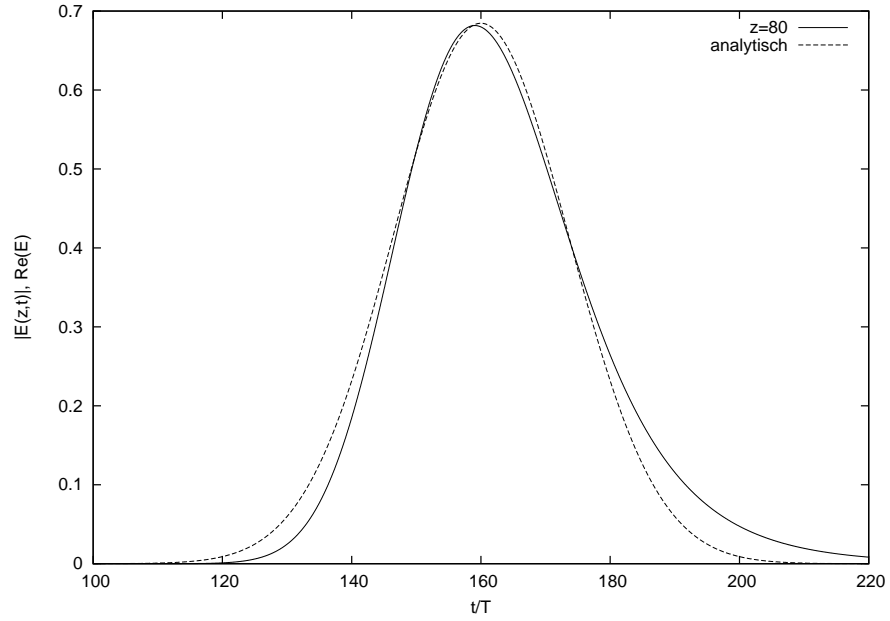


Abbildung 2.3: Dargestellt sind die Einhüllenden von Gauß-Pulsen mit a) $N = 80$ Wellenzügen, $z = 80\lambda$ bzw. b) $N = 5$ Wellenzügen, $z = 100\lambda$. Die sonstigen Werte sind $\frac{\omega_p^2}{\Omega^2} = \frac{3}{4}$, $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Dabei wurden die numerischen Ergebnisse und (2.7) geplottet.

Vorläufer

Zwar ist die Gruppengeschwindigkeit in dispersiven Medien kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c , doch gibt es nahe der maximalen Weglänge $z_{\max} = c \cdot t_0$, bis zu der sich Licht im Vakuum bis zur Zeit t_0 fortbewegt hat, auch schon in Medien Modulationen des elektrischen Feldes. Eine Art dieser Modulationen nahe z_{\max} nennt sich Sommerfeld-Vorläufer.

Es werden Pulse behandelt, die sich für kurze Zeiten ($t \rightarrow 0$) nach dem Einschalten an der Stelle $z = 0$ wie

$$\varepsilon(t) = a \frac{t^m}{m!} \quad (2.45)$$

verhalten. Man kann verifizieren, dass

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = a \left(\frac{i}{\omega} \right)^{m+1} \quad (2.46)$$

für

$$\omega \rightarrow \infty. \quad (2.47)$$

die Fouriertransformierte von ε ist, indem man die Rücktransformation vollzieht:

$$\varepsilon(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{\varepsilon}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (2.48)$$

$$= \oint_{\gamma} \frac{d\omega}{2\pi} a \left(\frac{i}{\omega} \right)^{m+1} e^{-i\omega t} \quad (2.49)$$

Definiert man das Integral in einen Halbkreis in der oberen Halbebene mit $|\omega| \rightarrow \infty$ und ergänzt es in der unteren Halbebene zu einem vollen Kreis, so ist auf diesem Integrationsweg die Hochfrequenznäherung anwendbar, wenn man den Ursprung in negativem Sinn umläuft. Das verbleibende Integral kann dann mit dem Residuensatz ausgewertet werden:

$$\varepsilon(0, t) = \frac{a}{2\pi} i^{m+1} (-2\pi i) \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^{m+1}} \right)_{\omega=0} \quad (2.50)$$

$$= \frac{a}{2\pi} i^{m+1} (-2\pi i) \frac{(-it)^m}{m!} \quad (2.51)$$

$$= a \frac{t^m}{m!}. \quad (2.52)$$

Auch hier berechnet man den Puls, der den Weg z im Medium weitergewandert ist, durch eine Fouriertransformation von $\hat{\varepsilon}(\omega)e^{ik(\omega)z}$. Dann erhält man mit

$$\varepsilon(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega a \left(\frac{i}{\omega} \right)^{m+1} e^{ik(\omega)z - i\omega t} \quad (2.53)$$

das reelle Feld des Pulses am Ort z zur Zeit t . Um dieses Integral auszuwerten, entwickelt man die Wellenzahl $k(\omega)$ aus (2.10) mit der Dispersionsrelation $\epsilon(\omega)$ von (3.46). Die Dispersionsrelation wird zwar erst später hergeleitet, sie kann aber hier angewendet werden. Daraus resultieren folgende Ersetzungen:

$$k(\omega)z = \omega t_0 - \frac{\xi}{\omega}, \quad t_0 = \frac{z}{c}, \quad \xi = \frac{1}{2}\omega_p^2 t_0. \quad (2.54)$$

Zusätzlich kann man

$$\omega = i\sqrt{\frac{\xi}{t-t_0}}e^{i\theta} \quad \text{und} \quad x = 2\sqrt{\xi(t-t_0)} \quad (2.55)$$

substituieren. Der Nenner kann dann mit dann als

$$\omega t_0 - \frac{\xi}{\omega} - \omega t = i\sqrt{\frac{\xi}{t-t_0}}(t_0 - t)e^{i\theta} - \frac{\xi}{i}\sqrt{\frac{t-t_0}{\xi}}e^{-i\theta} \quad (2.56)$$

$$= i(e^{-i\theta} - e^{i\theta})\sqrt{\xi(t-t_0)} \quad (2.57)$$

$$= x \sin(\theta) \quad (2.58)$$

umgeschrieben werden. Dann lässt sich (2.53) weiter umformen:

$$\varepsilon(z, t) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta (-i\omega) \left(\frac{1}{-i\omega} \right)^{m+1} e^{ix \sin \theta}. \quad (2.59)$$

Jetzt wird ω weiter ersetzt

$$\varepsilon(z, t) = \frac{a}{2\pi} \left(\frac{t-t_0}{\xi} \right)^{\frac{m}{2}} \int_{\pi}^{+\pi} d\theta e^{i(x \sin \theta - m\theta)}. \quad (2.60)$$

Der Imaginärteil des Integrals verschwindet direkt und bei dem Realteil kann man ausnutzen, dass er eine gerade Funktion ist.

$$\Rightarrow \varepsilon(z, t) = \frac{a}{2\pi} \left(\frac{t-t_0}{\xi} \right)^{\frac{m}{2}} \int_0^{\pi} d\theta \cos(x \sin \theta - m\theta) \quad (2.61)$$

Und aus diesem Term lässt sich das Endergebnis der Umformungen angeben

$$\varepsilon(z, t) = a \left(\frac{t - t_0}{\xi} \right)^{\frac{m}{2}} J_m(2\sqrt{\xi(t - t_0)}) \quad \text{für} \quad t > t_0 \quad (2.62)$$

da mit $J_m(x)$ die Besselschen Funktionen gegeben sind.

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(x \sin \theta - m\theta). \quad (2.63)$$

Für Pulse, welche sich nicht wie (2.45) verhalten, sei auf [9] verwiesen. Bei den Veröffentlichungen zu dem Thema ist natürlich [19] zu nennen, in der A. Sommerfeld das Problem für ebene monochromatische Wellenzüge berechnet und die Arbeit von Brillouin[4], welcher eine Entwicklung gemacht hat, in der Vorläufer berechnet werden, die zeitlich den Sommerfeld'schen Vorläufern folgen.

Ergebnisse anhand von \sin^2 -Pulsen Es werden Berechnungen mit \sin^2 -Pulsen der Form

$$\varepsilon = \begin{cases} -\sin^2\left(\frac{\Omega t}{2N}\right) \sin(\Omega t) & 0 < \Omega t^2 \pi N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.64)$$

durchgeführt, da diese sich wie in (2.45) gefordert, entwickeln lassen. Entwickelt man den Puls um $t \rightarrow 0^+$, so folgt für die Parameter von (2.45)

$$a = -\frac{3}{2} \frac{\Omega^3}{N^2}, \quad m = 3. \quad (2.65)$$

Demnach ergibt sich für die Form der Vorläufer von \sin^2 -Pulsen

$$\varepsilon(z, t) = -\frac{3}{2N^2} \left(\frac{t'}{z'} \right)^{\frac{3}{2}} j_3(2\sqrt{z't'}) \quad (2.66)$$

mit dimensionslosen Variablen

$$z' = \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\Omega^2} K z \quad (2.67)$$

$$t' = \Omega(t - t_0) \quad (2.68)$$

Zwei Beispiele hierzu sind in Abbildung 2.4 dargestellt. Man erkennt, dass an der Grenze zur Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit die analytischen und simulierten Lösungen gut übereinstimmen und sie sich nach 3 bzw. 5 auf die Lichtperiode T normierten Zeitschritten schon so stark unterscheiden, dass die Lösungen jeweils um eine halbe Wellenlänge verschoben sind. Das wird als Kriterium angesehen, ab dem die Sommerfeldvorläufer die Welle nicht mehr gut beschreiben. Hier wird also die Entwicklung der Wellenzahl zu ungenau.

Ansonsten decken sich die Ergebnisse für kleine Zeiten nach Eintreffen der maximal schnellen Phasen immer besser, je mehr man an die Grenze zu $t = \frac{z}{c}$ geht.

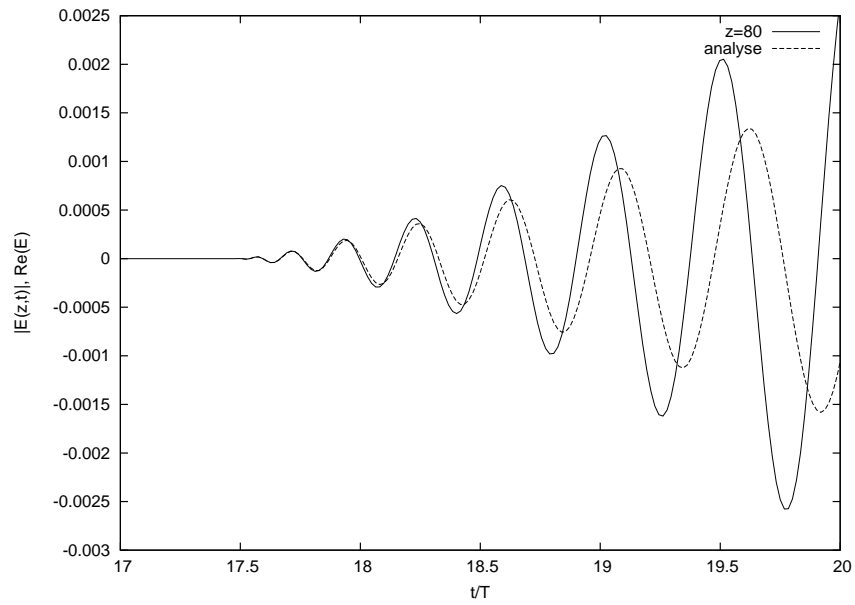
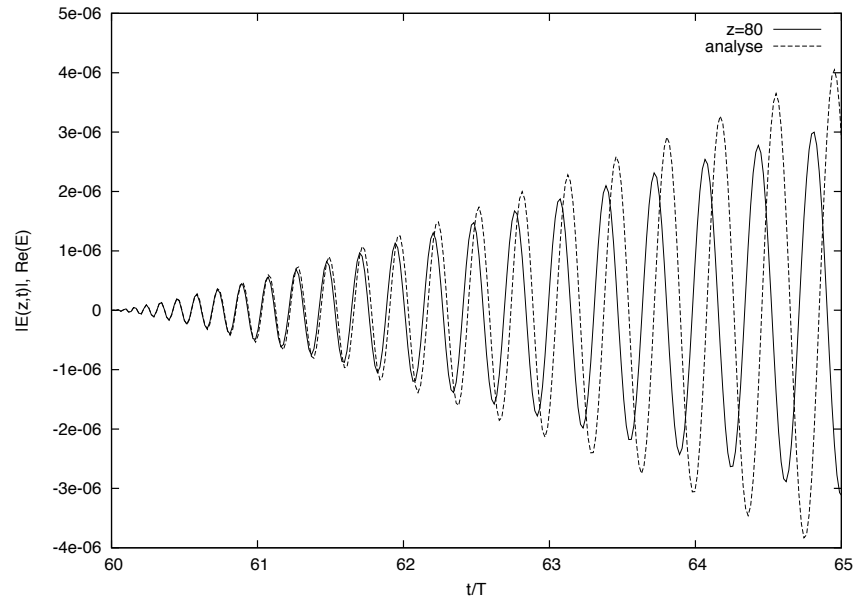


Abbildung 2.4: Vergleich zwischen analytischer und numerischer Berechnung der Vorläufer. Die zugrundeliegenden Werte sind a) $N = 40$ und $z = 60\lambda$, b) $N = 5$ und $z = 20\lambda$ mit $\frac{\omega_p^2}{\Omega^2} = \frac{3}{4}$, $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

3 Particle-In-Cell Methode

Die Methode der Fouriertransformation ist eine sehr schnelle Methode, um die Ausbreitung von Wellen in Medien wie z.B. Plasmen zu bestimmen. Sobald aber nichtlineare Differentialgleichungen gelöst werden müssen, kann man sie nicht mehr anwenden.

Bei relativistischen Plasmen entstehen durch die Bewegung der Ionen und Elektronen im Plasma selbst Ströme und Dichteschwankungen, die eigene Felder erzeugen. Diese Felder beeinflussen aber selbst wieder die Bewegung der Ladungen, so dass sich nichtlineare Effekte einstellen.

Eine Möglichkeit die Maxwell- und Bewegungsgleichungen für Plasmen zu simulieren, ist die PIC-Methode. Hierbei wird die Dynamik des Plasmas anhand eines Teilchenensembles simuliert. Dieses Ensemble wird durch so genannte Simulationsteilchen repräsentiert. Für diese werden die Bewegungsgleichungen jedes Simulationsteilchens im gesamten Feld numerisch gelöst.

Man kann man sich die Simulationsteilchen auch als Klumpen von Ionen bzw. Elektronen im Plasma vorstellen, so dass das Simulationsteilchen deren Gesamtmasse und -ladung repräsentiert [18].

3.1 Normierungen

Um die einzelnen Rechnungen zu erleichtern, werden die physikalischen Größen so skaliert, dass sie dimensionslos sind. so kann man Ort und Zeit mit

$$\tilde{t} = \omega \cdot t \quad \tilde{x} = \frac{\omega}{c} x \quad (3.1)$$

normieren. Hier ist c die Lichtgeschwindigkeit es wurde eine Normierungsfrequenz ω eingeführt. Die Felder und Potentiale werden folgendermaßen normiert:

$$\tilde{\vec{E}} = \frac{e\vec{E}}{m_e\omega c} \quad \tilde{\vec{B}} = \frac{e\vec{B}}{m_e\omega c} \quad \tilde{\vec{A}} = \frac{e}{m_e c} \vec{A}. \quad (3.2)$$

und die Ladungsdichte ρ bzw. Stromdichte \vec{j} werden mit

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho m_e}{e} \quad \tilde{\vec{j}} = \frac{\vec{j}}{en_{e0}c} \quad (3.3)$$

normiert. Für die folgenden Rechnungen wird die $c = m_e = e = 1$ gesetzt. Da ab hier nur noch in den normierten Größen gerechnet wird, werden ab jetzt die Tilden für die Normierung nicht mehr mitgeschrieben.

Die Maxwellgleichungen (1.1), (1.2) lauten in dieser Normierung und den gewählten Einheiten

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \rho \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \vec{j}. \quad (3.5)$$

Dabei wurde die Plasmafrequenz $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_{e0}e^2}{m}}$ eingeführt. Wenn man die Plasmafrequenz als Normierungsfrequenz wählt, werden die Terme übersichtlicher. Für die Lorentzgleichung (1.11) und die Geschwindigkeiten gelten

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\gamma} \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{v} \quad (3.8)$$

Der relativistische γ -Faktor lässt sich als

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{v})^2}} \quad (3.9)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1 - \vec{v}^2}{1 - \vec{v}^2} + \frac{1}{1 - \vec{v}^2}} \quad (3.10)$$

$$= \sqrt{1 + (\gamma \vec{v})^2} \quad (3.11)$$

$$= \sqrt{1 + \vec{p}^2} \quad (3.12)$$

schreiben.

3.2 Wahl der Felder

Es wird generell bei Berechnungen in dieser Arbeit der senkrechte Einfall von ebenen Wellen auf homogene Plasmen behandelt. Dann hängen die Felder nur noch von einer Koordinate ab. Diese ist hier die x-Koordinate. Bei der Behandlung von Wellenausbreitung in einem als lineares Medium zu behandelnden Plasma oder wenn in Abschnitt 3.5.3 sich die Felder im Vakuum ausbreiten, sind die Lösungen der Wellengleichung (1.9) nur so möglich, dass das \vec{E} und \vec{B} -Feld jeweils senkrecht aufeinander steht. Deshalb werden die Felder mit den Komponenten

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(x(t), t) \\ E_y(x(t), t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(x(t), t) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

gewählt. Mit dieser Wahl ist die z-Komponente des Impulses konstant. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird dieser null gesetzt.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x(x(t), t) \\ p_y(x(t), t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Mit diesen Voraussetzungen geht die Wellengleichung für das Vektorpotential über in

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_y - \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_y = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} j_y. \quad (3.15)$$

Außerdem ist das Gauß-Gesetz nun in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{E} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \rho. \quad (3.16)$$

Mit dieser Wahl kann man herleiten, dass in diesem Einheitensystem die transversalen Impulse gleich dem transversalen Vektorpotential sind. Mit $(\vec{p} = \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp})$

$$\stackrel{(1.4),(1.5)}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} \vec{p}_{\perp} = \frac{\partial}{\partial t} A_{\perp}(x, t) + (v_x \frac{\partial}{\partial x}) A_{\perp}(x, t) \quad (3.17)$$

Hierbei wurde benutzt, dass das elektrische Potential für die Ausbreitung null gewählt werden kann.

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_{\perp} = \frac{d}{dt} A_{\perp}(x, t) \quad (3.18)$$

und dem kanonischen Impuls

$$P(x, t) = p(x, t) - A(x, t) \quad (3.19)$$

$$\stackrel{(3.61)}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} P_{\perp}(x, t) = 0. \quad (3.20)$$

Das heißt, für $\vec{P}_{\perp}(t = 0) = 0$ ist der transversale Impuls gleich dem Vektorpotential. Also ist in diesem Einheitensystem mit $p_z = 0$,

$$p_y = A_y \quad (3.21)$$

wenn man den kanonischen Impuls in y-Richtung $P_y(t = 0) = 0$ wählt.

3.3 Vlasov-Gleichung

Für die Lösung der Maxwellgleichungen müssen die Strom- \vec{j} und Ladungsdichte ρ bekannt sein. Zur Bestimmung dieser beim Plasma benötigt man die Verteilung der Plasmateilchen. In einem Flüssigkeitsmodell sei die Verteilungsfunktion

$$F^N(\vec{x}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{p}_n) \quad (3.22)$$

gegeben, welche die Wahrscheinlichkeit beschreibt, ein N-Teilchensystem im Phasenraum in einer bestimmten Konfiguration (Orte \vec{x}_n , Impulse \vec{p}_n der nten Teilchen) vorzufinden (vgl. Abbildung 3.2). Alle Verteilungsfunktionen $f_i(\vec{x}, \vec{p})$ der einzelnen Teilchenarten i zusammen reichen aus, um das Gesamtsystem zu beschreiben[18]. Für ein stoßfreies Plasma verschwindet die totale Zeitableitung der Verteilungsfunktion $f(\vec{x}(t), \vec{p}(t))$ für eine bestimmte Teilchensorte i .

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t), \vec{p}(t)) = \frac{\partial}{\partial t} f + \vec{v} \nabla f + \frac{\vec{F}}{m} \nabla_p f \quad (3.23)$$

$$= 0 \quad (3.24)$$

Hierbei bezeichnet \vec{v} die Geschwindigkeit, m die Masse und \vec{F} die Kraft auf das Teilchen. Man kann Gleichung (3.23) nun direkt numerisch lösen. Nur ist dieser Ansatz sehr rechenintensiv[18], da bei dem Verfahren die Vlasov-Gleichung an jedem Phasenraumpunkt gelöst werden muss (s. Abbildung 3.2).

3.4 PIC

Deshalb werden punktförmige Simulationsteilchen eingeführt, die sich jeweils an den Phasenraumpunkten (\vec{x}_n, \vec{p}_n) befinden. Für diese Simulationsteilchen werden dann die Bewegungsgleichungen gelöst, so dass man anhand der Bahn der Simulationsteilchen im Phasenraum (Charakteristiken) den Fluss des Plasmas simuliert. Der Vorteil dieser Technik gegenüber dem Lösen der Vlasov-Gleichung ist, dass hier jeweils nur der Fluss an den Phasenraumpunkten der Simulationsteilchen bestimmt werden muss und nicht im gesamten Raum, der ja auch aus Orten besteht, an denen die Verteilungsfunktion verschwindet. Die Maxwellgleichungen müssen zwar auch noch im Raum gelöst werden, dieser ist aber nicht mehr 6 sondern 3-dimensional.

Regularisierung Zwar sollen sich die Teilchen wie Punktteilchen im Phasenraum bewegen, es sollen aber für die Darstellung der Dynamik des Plasmas durch das Gitter bedingte Stoßeffekte vermieden werden. Dafür wird die Coulomb-Wechselwirkung durch Ersetzen der Punktladungen durch verschmierte Ladungsdichten ersetzt (s. auch Abbildung 3.1).

$$q_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \rightarrow q_n S(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (3.25)$$

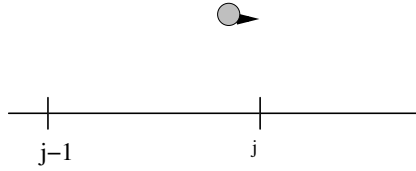
Diese Ladungsdichten, auch Ladungswolken genannt, werden dann bei der numerischen Berechnung der Felder jeweils den nächsten Gitterpunkten zugeordnet.

Hiermit erreicht man, dass sich Ladungswolken im Ortsraum überlagern können und ohne Probleme auch aneinander vorbei können. Ohne die Ladungswolken kommt es bei kurzen Abständen zu starken Abstoßungen und falls die Ladungen dem gleichen Gitterpunkt zugeordnet werden, wird die Berechnung der Kraft ungenau.

Außerdem bliebe die Zuordnung der Ladung so lange an diesem Gitterpunkt, bis sie über die Grenze zur nächsten Zelle gelange. Bei der Feldberechnung springt die Ladung dann plötzlich auf den anderen Gitterpunkt und analog gibt es einen Sprung in der Kraft auf die Ladung im Feld[12] [3].

Die Einführung der Ladungswolke verhindert dies und ermöglicht einen stetigen Übergang von einem Gitterpunkt zum nächsten.

a)



b)

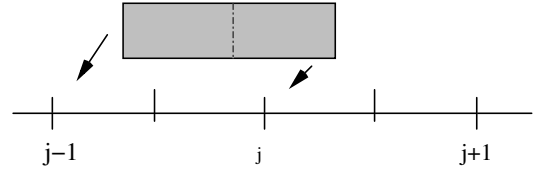
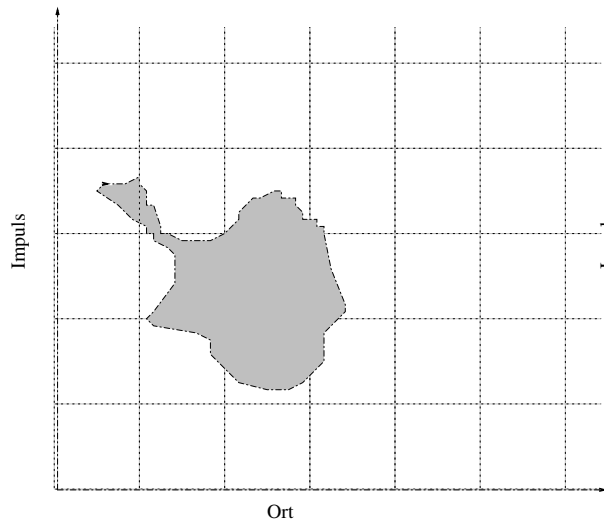


Abbildung 3.1: Wenn die gesamte Punktladung wie in Abbildung a) dem nächsten Gitterpunkt zugeordnet wird, gibt es Unstetigkeiten bei der Berechnung der Ladungsdichte in den einzelnen Zellen und ein zusätzliches Rauschen in der Energie. In dieser Diplomarbeit wird eine Regularisierung wie in Darstellung b) gewählt. Dabei wird die Ladung auf die Breite einer Zelle verteilt und die Anteile der Ladung werden den jeweiligen Gitterpunkten j zugeordnet. Am Ende wird noch das Mittel zwischen zwei Gitterpunkten gebildet, um eine höhere Genauigkeit zu erreichen.

a)



b)

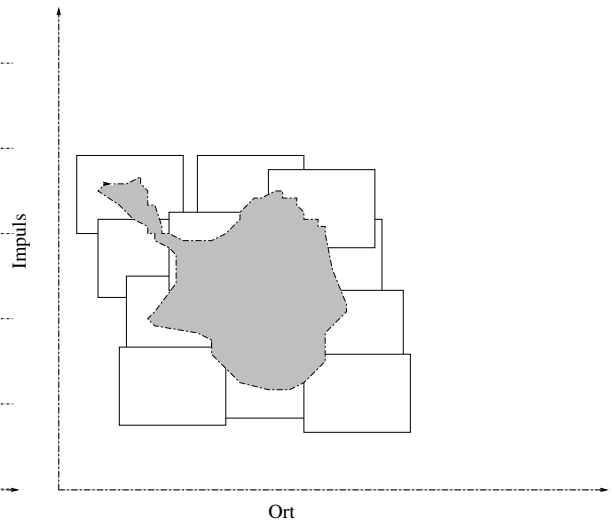


Abbildung 3.2: Veranschaulichung zweier Arten von kinetischer Plasma Simulation. a) Die Vlasov Methode löst die Flüssigkeitsgleichungen an jedem Gitterpunkt des Phasenraumes. b) Bei der Particle In Cell Simulation müssen die Phasenraumkoordinaten der Teilchen berechnet werden.

3.5 Transversale und longitudinale Wellen

Mit den Gleichungen (3.15), (3.16), (3.7), (3.6) kann man bei Vorgabe einer Anfangsverteilung der Ladungen und gegebenen Anfangsimpulsen mittels der PIC Simulation die Felder und Phasenraumkoordinaten der Teilchen bestimmen. Dies wird prinzipiell anhand von Abbildung 3.3 erklärt. Deutlicher wird die Vorgehensweise noch, wenn der Wellenlöser und die Berechnung für das elektrische Feld anhand einfacher Beispiele getestet werden.

Für die Particle-In-Cell Simulation werden als Startwerte die Simulationsteilchen auf dem Gitter mit vorgegebenen Anfangsimpulsen. Dabei vernachlässigt man hier die Bewegung der Ionen, da deren Masse drei Größenordnungen höher als die der Elektronen ist. Deshalb werden nur Elektronenbewegungen in einem homogenen Plasma vor festem Ionenhintergrund betrachtet.

Das Gauß'sche Gesetz (3.16) erlaubt die Berechnung des elektrischen Feldes \vec{E}_x , das Vektorpotential in y-Richtung A_y gibt den Impuls in y-Richtung vor. Da man jetzt die Felder auf dem Gitter kennt, können jetzt die Kräfte auf jedes Teilchen mit (3.6) berechnet werden. Sind die Kräfte auf jedes Teilchen bestimmt, lässt sich damit die Geschwindigkeit jedes Teilchens mit (3.7) bestimmen und danach dann auch die Ortsverteilung der Plasmaladungen nach einem Zeitschritt sowie die Stromdichten während dieses Schrittes. Durch die y-Impulse ist durch das Vektorpotential das Magnetfeld bestimmt und die Berechnung kann wieder von vorne beginnen.

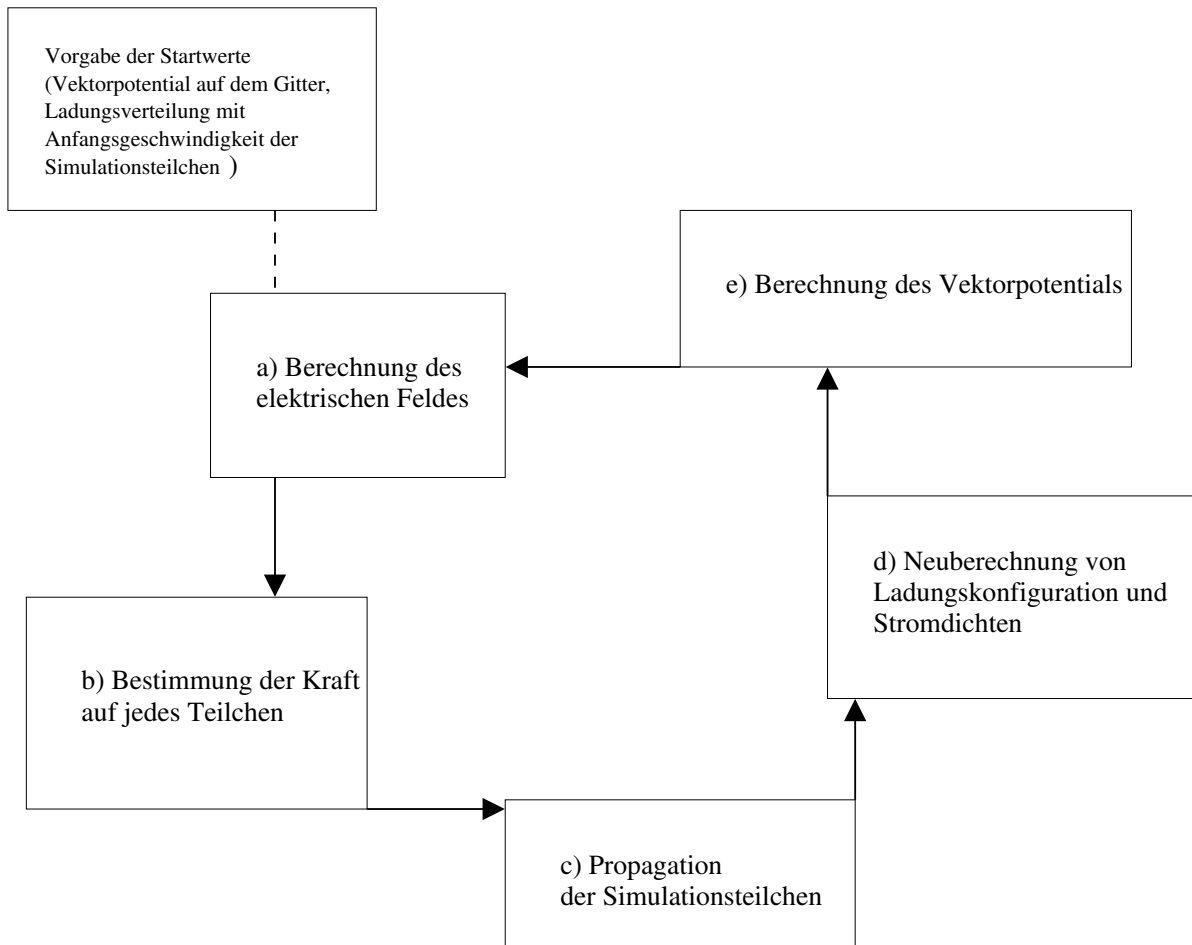


Abbildung 3.3: Das Schema der PIC-Simulation: Ordnet man die Feld- und Bewegungsgleichungen den Schritten zu, dann wird bei a) (3.4), b) (3.6), c) (3.7), d) die Regularisierung und e) (3.15) berechnet.

In der nichtrelativistischen Physik wird $\gamma = 1$ gesetzt. Dann sind das Gauß-Gesetz und die Wellengleichung für das Vektorpotential entkoppelte Differentialgleichungen und sie lassen sich einzeln lösen. Um einerseits die einzelnen Teile des Codes zu testen und andererseits deren Arbeitsweise näher zu erläutern werden hier zwei Fälle von Wellenausbreitung betrachtet. Einmal wird die transversale Ausbreitung von Wellen im Plasma behandelt und einmal die longitudinale.

3.5.1 Explizites Verfahren zur Lösung der Wellengleichung

Es wird ein explizites Verfahren zum Lösen der Wellengleichung benutzt [2].

Expliziter Algorithmus

Beim expliziten Lösungsverfahren werden bei der normierten Wellengleichung (3.15) die Felder an den Gitterpunkten berechnet, indem die Ableitungen numerisch umgesetzt werden.

$$\Rightarrow -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} J(x, t) = \Delta A(x, t) - \partial_t^2 A(x, t) \quad (3.26)$$

Mit diskretisiertem Ort und diskretisierter Zeit berechnet man die Ableitungen numerisch [2]:

$$x \rightarrow j \cdot \Delta x \quad (3.27)$$

$$t \rightarrow n \cdot \Delta t \quad (3.28)$$

$$A(x, t) \rightarrow A(j \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) \equiv A_j^n \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} J_j^n = \frac{A_{j-1}^n - 2A_j^n + A_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{A_j^{n-1} - 2A_j^n + A_j^{n+1}}{(\Delta t)^2}. \quad (3.30)$$

$$\Rightarrow A_j^{n+1} = \alpha [A_{j+1}^n - 2A_j^n + A_{j-1}^n] + 2A_j^n - A_j^{n-1} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} J_j^n (\Delta t)^2 \quad (3.31)$$

Hierbei ist $\alpha = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$. Das Courant-Kriterium $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ legt hierbei ein Maximum für diesen Faktor fest. Die Herleitung dieses Kriteriums findet man in [2], anschaulich ist es in Abbildung 3.4 dargestellt. Der Fall $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$ ist für den Fall der Ausbreitung der elektromagnetischen Welle im Vakuum stabil. Es wird ein Wert kleiner eins gewählt, damit man nun den Einfall einer Welle von $x < 0$ auch in ein Medium simulieren kann. Zum Beispiel wird vorgegeben, es sei kein Vektorpotential zum Zeitpunkt $t = n \cdot \Delta t = 0$ vorhanden und am Rand sei $A(0, n \cdot \Delta t)$ zu jedem Zeitschritt $n\Delta t$ vorgegeben. Das bewirkt eine Ausbreitung des Pulses vom linken Rand des Simulationsgebietes zum rechten.

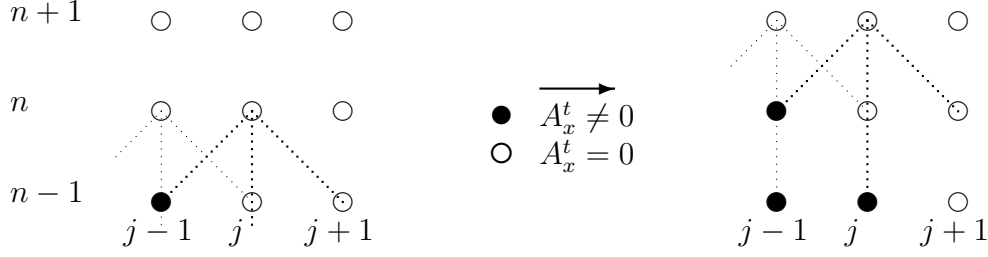


Abbildung 3.4: In der linken Grafik ist zu sehen, wie das Vektorpotential zum n -ten Zeitschritt berechnet wird. Dabei wird A_j^n mittels A_{j-1}^{n-1} , A_j^{n-2} , A_j^{n-1} und A_{j+1}^{n-1} bestimmt. A_{j-1}^n dementsprechend mit den Werten, die auf dem Gitter einen Schritt weiter links liegen. Die rechte Abbildung zeigt das Ganze noch einmal für den Schritt $n + 1$. Hier ist die Berechnung einen Orts- und Zeitschritt weitergewandert.

Das Courant-Kriterium bedeutet, dass die Berechnung der Gitterpunkte immer mindestens genauso schnell sein muss, wie die Ausbreitungsgeschwindigkeit des betrachteten Feldes bzw. Potentials.

Vergleich mit analytischen Rechnungen

Nichtrelativistische stationäre Bedingungen In einem Medium mit Brechungsindex n gilt für den Wellenvektor im Medium $\tilde{k} = n \cdot k_0$, wenn k_0 der Wellenvektor im Vakuum ist.

$$\Rightarrow \frac{1 - \frac{k}{\tilde{k}}}{1 + \frac{k}{\tilde{k}}} = -\frac{1 - n}{1 + n}. \quad (3.32)$$

Für eine von $x = -\infty$ einlaufende ebene Welle mit Amplitude A^+ ist das gesamte Feld mit den in Abschnitt 3.1 gewählten Normierung für $x < 0$ und Grenzfläche bei $x = 0$ liegt:

$$A_{y\text{pre}} = A^+ e^{i(x-t)} + A^- e^{i(-x-t)} \quad (3.33)$$

Die Welle, die sich in dem Medium bei $x > 0$ fortpflanzt, wird mit

$$A_{y\text{post}} = A_a e^{i(nx-t)} \quad (3.34)$$

bezeichnet. Hierbei sind A^+, A_a die Amplituden der reflektierten und transmittierten Welle. Durch die Stetigkeitsbedingungen - das Feld darf keinen Sprung haben und die Normalenableitung muss stetig sein - folgt

$$A_a = \frac{2A^+}{1+n} \quad (3.35)$$

$$A^- = \frac{n-1}{n+1}A^+. \quad (3.36)$$

Man kann Poyntingvector J definieren als

$$S = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{B} \quad (3.37)$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_t A_y(x, t)\partial_x A_y(x, t) \quad (3.38)$$

$$\Rightarrow S_{\text{ein}} = \frac{1}{2}(A^{+2} - A^{-2}) \quad (3.39)$$

$$= A^{+2} \frac{n}{1+n} \quad (3.40)$$

$$= S_{\text{aus}} = \frac{1}{2}nA_a^2. \quad (3.41)$$

Außerdem gilt mit den Gleichungen (3.33) und (3.36) für reelle Amplituden

$$|A_{y\text{pre}}|^2 = A^{+2} + A^{-2} + A^+A^- (e^{2x} + e^{-2x}) \quad (3.42)$$

$$= A^{+2} \left(1 + \frac{A^{-2}}{A^{+2}} + A^- \cos(2x) \right). \quad (3.43)$$

Für die transmittierte Welle folgt bei Betragsbildung sofort

$$|A_{y\text{post}}|^2 = A_a^2. \quad (3.44)$$

Es wurden nun für verschiedene Frequenzen und Amplituden Wellen auf ein Plasma propagiert und dabei die Stromdichte berechnet, sowie der Realteil der Welle (s. Abbildung 3.5 ausgegeben. Da in diesem Teil der Arbeit der Wellenlöser alleine getestet wurde, ist die Stromdichte in (3.15) nichtrelativistisch vorgegeben worden mit $j_y = -v_y n(x, t) = -\frac{p_y}{\gamma} n(x, t) \stackrel{\gamma \approx 1}{\approx} -\omega_p^2 A_y$. Mit der Näherung erhält man die Dispersionsrelation für nichtrelativistisch Plasmen aus der Wellengleichung[5] (3.15). Für die Berechnung wird als Normierungsfrequenz ω_p gewählt.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_y - \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_y = -\omega_p^2 A_y \quad (3.45)$$

Mit A_{ypre} oder A_{post} ist

$$\Rightarrow k^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \quad (3.46)$$

Dies ist die Dispersionsrelation für nichtrelativistische Plasmen. Man kann sehr deutlich in Abbildung 3.5 erkennen, dass für $\frac{\omega_p^2}{\Omega^2} = \frac{3}{4}$ die Wellenlänge sich im Plasma, welches sich im Halbraum $x' > 0$ befindet, verdoppelt. Nach der Dispersionsrelation muss das auch so sein, da $k^2 = \frac{1}{2}\omega \propto \lambda^{-1}$ ist.

In Abbildung 3.6 wurde der Betrag der Welle ausgegeben und mit (3.43), (3.44) verglichen. $|A_{ypost}|^2$ ist konstant. Das wird reproduziert. Die Schwingungen zum rechten Rand hin resultieren daraus, dass bei der Simulation erst eine monochromatische Welle in die positive x-Richtung geschickt wurde und sich die stationären Bedingungen erst einstellen mussten. Nach langer Rechenzeit werden diese Schwingungen aber immer kleiner. Die Stromdichte ist hierbei konstant mit $S_{ein} = 0.67 \pm 1\%$ und $S_{aus} = 0.67 \pm 1.5\%$.

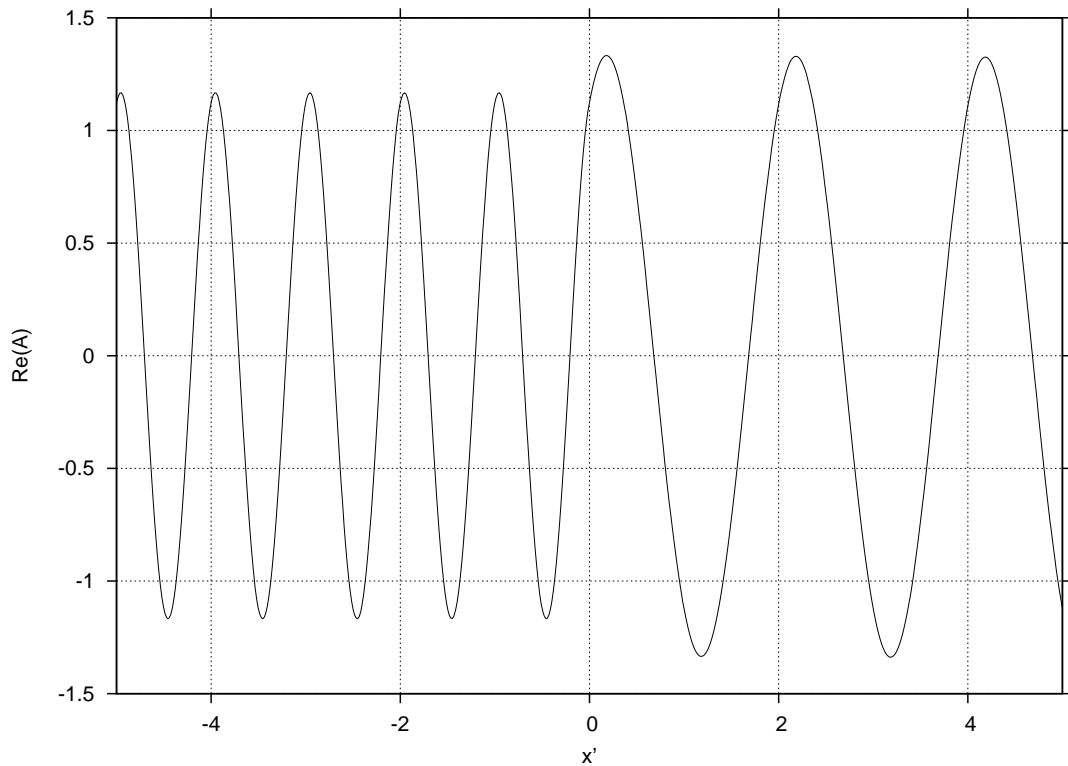


Abbildung 3.5: Die Darstellung zeigt den Realteil einer ebenen Welle, welche an einem Plasma mit $\frac{\omega_p^2}{\Omega^2} = \frac{3}{4}$ reflektiert wird. Man erkennt, dass sich die Wellenlänge im Plasma verdoppelt. Für die Normierungsfrequenz wurde die Plasmafrequenz gewählt.

3.5.2 1d Berechnung des elektrischen Feldes

Algorithmus

Für die Berechnung des longitudinalen elektrischen Feldes wird aus den Anfangsbedingungen die Bewegungsgleichung der Teilchen für einen Zeitschritt gelöst. Mittels des

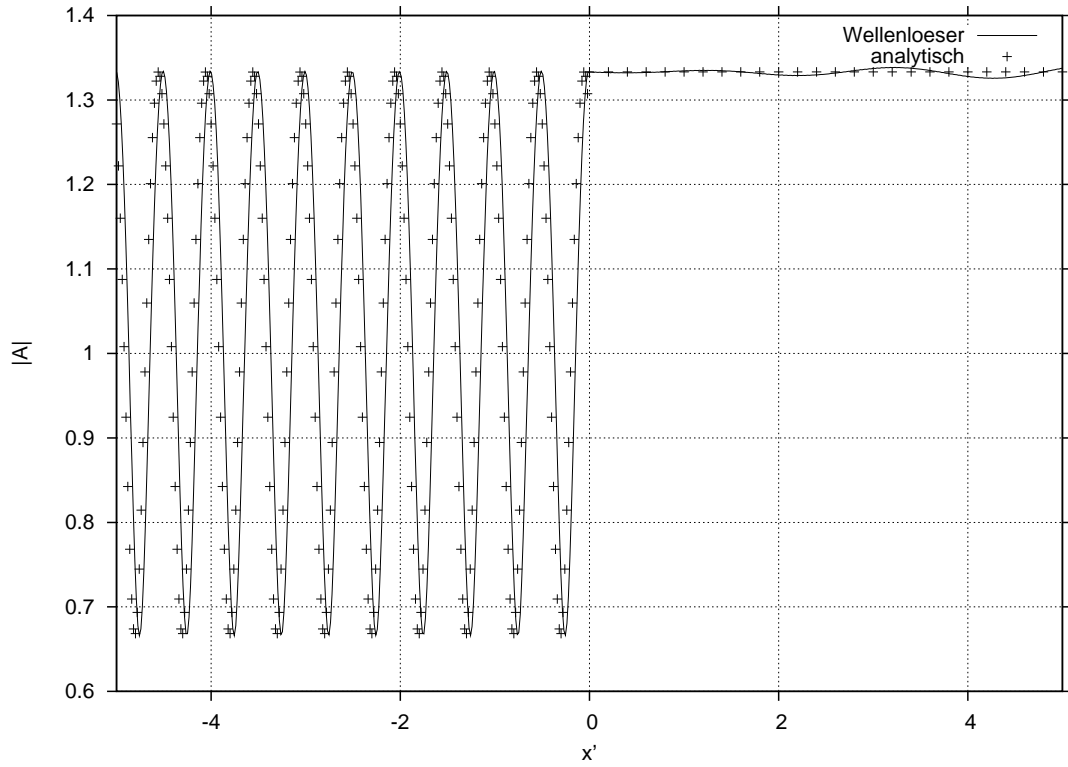


Abbildung 3.6: Der berechnete Betrag der Welle (Wellenlöser) wird mit Gleichung (3.43), (3.44) (analytisch) verglichen. Die Parameter der Simulation sind $A^+ = 1$, $\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} p^2 = \frac{3}{4}$.

Gauß'schen Gesetzes aus (3.4) wird damit dann das longitudinale Feld neu bestimmt.

$$\frac{E_j^n - E_{j-1}^n}{\Delta x} = \frac{\tau_j^n + \tau_{j-1}^n}{2} \quad (3.47)$$

$$v_j^{n+\frac{1}{2}} = p_j^{n+\frac{1}{2}} = p_j^{n-\frac{1}{2}} - \sum_k W_{jk} \Delta t E_k^n \quad (3.48)$$

$$x_j^{n+\frac{1}{2}} = x_j^n + v_j^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.49)$$

Für den jeweils folgenden Zeitschritt sind die für die Berechnung der Ladungsdichte benötigten Positionen bekannt, also kann das elektrische Feld neu bestimmt und die Bewegungsgleichung auch von neuem gelöst werden. Die Mittelung in der Bestimmung der Ladungsdichte auf dem Gitter ist nötig, da bei der Ableitung des Feldes nach x der berechnete Wert zwischen den Gitterpunkten liegt. Also wird die Rechnung genauer, wenn man auch die Teilchendichte dort berechnet.

Plasmaschwingungen

Es wird ein Test zur Berechnung der Plasmaschwingungen bei anfänglich homogener Ladungsverteilung mit zum Gittermittelpunkt symmetrischer Impulsverteilung der Ladungen gemacht. Dabei wird eine Teilchendichte benutzt, wie sie auch für die relativistische Teilchensimulation verwendet werden kann. Für die einzuhaltenden Parameter sei auf [1] verwiesen.

Kontinuierliches Plasma Das geladene Teilchen bei kleinen Störungen mit der Plasmafrequenz schwingen, gilt auch für ein Plasma.

Als Parameter der Simulation dieser Schwingung sind 1000 Gitterzellen mit zwei Simulationsteilchen pro Zelle gewählt worden. Die Impulse sind anfangs jeweils mit $p_{x_i} = 0.2 \sin\left(\frac{x_i}{2\pi J}\right)$ und die Teilchen selbst homogen im Ort verteilt worden. Hierbei ist i ein Teilchenindex und J die Gittergröße.

Wie in Abbildung 3.7 anhand der Teilchenbahnen zu sehen, schwingen die Teilchen wirklich mit der Plasmafrequenz.

3.5.3 Teilchenbewegung im Vakuum

Dieses Kapitel behandelt die Bewegung eines Elektrons in einer elektromagnetischen Welle für große Amplituden. Da das Elektron in diesem Fall sehr hohe Geschwindigkeiten erreicht, müssen die Bewegungsgleichungen des Elektrons hierbei relativistisch

gerechnet werden.

Der relativistische γ -Faktor bedingt, dass die im nichtrelativistischen Vakuumgrenzfall ungekoppelten Gleichungen für die Felder nun gekoppelt werden und man das Differentialgleichungssystem insgesamt lösen muss.

Weil die Bahn einer relativistischen Testladung, in diesem Falle ein Elektron, im elektromagnetischen Feld noch analytisch behandelbar ist, wird dieses Beispiel dafür benutzt, eine PIC-Methode zur Berechnung der Bahn eines geladenen Teilchens zu entwickeln.

Analytische Behandlung

Bei der Behandlung des Problems von einem Elektron im elektromagnetischen Feld wird die Rückwirkung der Ladung auf das elektromagnetische Feld vernachlässigt. Also generiert das Elektron bei der Bewegung im Feld weder eine signifikante Ladungsdichte ρ noch eine Stromdichte \vec{j} .

Für den Fall der Ladung im Feld einer ebenen Welle ergibt sich dabei eine Vakuumacht mit quadratischem Zusammenhang zwischen longitudinalem und transversalem Impuls.

Maxwellgleichungen im Vakuum Also gelten die Maxwellgleichungen (1.1) und (1.2), nur jetzt ohne die inhomogenen Terme und mit den elektromagnetischen Feldern im Vakuum

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.50)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = 0 \quad (3.51)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.52)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0. \quad (3.53)$$

Führt man die Potentiale wie in (1.4) und (1.5) ein, so kommt man wieder auf die Wellengleichung (3.15) ohne inhomogenen Term:

$$0 = \Delta \vec{A} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}. \quad (3.54)$$

Transversale elektromagnetische Wellen Es werden transversale elektromagnetische Wellen betrachtet, die sich in x-Richtung ($\vec{k} = k\vec{e}_x$) ausbreiten. Im Fall der Ladung im Vakuum kann man außerdem für das elektrische Potential $\phi_{el} = 0$ fordern. Im Folgenden

werden auch die Normierungen aus Abschnitt 3.1 gewählt. Damit kann man die Phase der Welle

$$\vec{A}(\phi) = A_0 \vec{e}_y \sin(\phi) \quad (3.55)$$

mit

$$\phi = \omega t - kx = \tilde{t} - \tilde{x} \quad (3.56)$$

angeben. Für die Ableitungen gelten damit folgende Zusammenhänge:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (3.58)$$

Bewegung der Testladung Die Bewegungsgleichung der Testladung in dem wie in (3.13) vorgegebenen Feld ist durch die Lorentzgleichung

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = -(\vec{E}(x, t) + \vec{v}(x, t) \times \vec{B}(x, t)) \quad (3.59)$$

mit dem relativistischen Impuls $\vec{p} = \gamma \vec{v} = \gamma \frac{\partial}{\partial t} \vec{x}$ bestimmt, wobei $\gamma = \sqrt{1 + \vec{p}^2}$ ist.

Nun wird zuerst hergeleitet, dass in diesem Problem und Einheitensystem die transversalen Impulse gleich dem transversalen Vektorpotential sind. Mit $(\vec{p} = \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp})$

$$\stackrel{(1.4),(1.5)}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} \vec{p}_{\perp} = \frac{\partial}{\partial t} A_{\perp}(x, t) + (v_x \frac{\partial}{\partial x}) A_{\perp}(x, t) \quad (3.60)$$

$$= \frac{d}{dt} A_{\perp}(x, t) \quad (3.61)$$

und dem kanonischen bzw. verallgemeinerten [11] [8] Impuls

$$P(x, t) = p(x, t) - A(x, t) \quad (3.62)$$

$$\stackrel{(3.61)}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} P_{\perp}(x, t) = 0. \quad (3.63)$$

Das heißt, für $\vec{P}_\perp(t=0) = 0$ ist der transversale Impuls gleich dem Vektorpotential. Wegen der Feldwahl in (3.13) ist das Vektorpotential in z-Richtung null, also

$$\vec{A}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ A_y(x, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_y(x, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

$$\Rightarrow p_y(x, t) = A_y(x, t) \quad (3.65)$$

$$p_z = 0. \quad (3.66)$$

Gleichzeitig lässt sich für den parallelen Impuls p_x

$$\frac{d}{dt}p_x = -E_x - [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})]_x \quad (3.67)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}A_x(x, t) - \vec{v} \left[\frac{\partial}{\partial x}A(x, t) \right] + (\vec{v} \nabla)A_x \quad (3.68)$$

$$= \frac{d}{dt}A_x - \vec{v} \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{A}(x, t) \right] \quad (3.69)$$

$$\stackrel{(3.64)}{=} -\vec{v} \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{A}(\phi) \right] \quad (3.70)$$

$$= \vec{v} \left[\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\phi) \right] \quad (3.71)$$

$$= \vec{v} \frac{d}{dt}\vec{p}(x, t) \quad (3.72)$$

$$= \frac{d}{dt}\gamma(x, t) \quad (3.73)$$

finden. Damit entdeckt man hier eine Erhaltungsgröße:

$$\Leftrightarrow const. = \gamma - p_x \quad (3.74)$$

Wählt man das Elektron anfangs in Ruhe, so ist $\gamma(x(0), t=0) = 1$

$$\Rightarrow 1 + p_x(x, t) = \gamma(x, t) \quad (3.75)$$

und man bekommt

$$p_x = \frac{1}{2}p_y^2. \quad (3.76)$$

So man hat den quadratischen Zusammenhang zwischen Transversal- und Longitudinalimpuls gefunden. Nun wird die Form der Felder berücksichtigt.

$$p_y = A_y(\phi) \quad (3.77)$$

$$= A_0 \sin(\phi) \quad (3.78)$$

$$\stackrel{(3.76)}{\Rightarrow} p_x = \frac{1}{2} A_0^2 \sin^2(\phi) \quad (3.79)$$

In z-Richtung findet keine Bewegung statt, die in y-Richtung ist periodisch, dort ist der kanonische Impuls erhalten. Aber das Elektron wird in x-Richtung beschleunigt, was man auch unmittelbar daran erkennt, dass laut (3.79) p_x immer positiv ist.

Es lässt sich eine mittlere Geschwindigkeit des Elektrons ermitteln. In das mit dieser Geschwindigkeit \bar{v} mitbewegte Bezugssystem wird mittels einer Lorentztransformation gewechselt.

$$\gamma' = \gamma(\bar{v})\gamma - \gamma(\bar{v})\bar{v}p_x \quad (3.80)$$

$$p'_x = -\gamma(\bar{v})\bar{v}\gamma + \gamma(\bar{v})p_x \quad (3.81)$$

Es wird gefordert, dass

$$\bar{p}'_x = 0 \quad (3.82)$$

ist.

$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{A_0^2}{4 + A_0^2} \quad (3.83)$$

$$\Rightarrow \gamma(\bar{v}) = \frac{4 + A_0^2}{\sqrt{16 + 8A_0^2}} \quad (3.84)$$

Setzt man dies in (3.81) ein, so folgt

$$p'_x = -\frac{A_0^2}{\sqrt{16 + 8A_0^2}} \cos(2\phi) \quad (3.85)$$

$$p'_y = p_y = A_0 \sin(\phi). \quad (3.86)$$

Beim Wechsel der Bezugssysteme gibt es auch Zeitdilatation. Die Zeit im mitbewegten

System ist $\tau = \frac{t}{\gamma(\bar{v})}$. Die Laserfrequenz ist wegen

$$\frac{d}{d\tau}\phi = \gamma \frac{d}{dt}\phi \quad (3.87)$$

$$= \gamma(1 - v_x) \quad (3.88)$$

$$= \gamma - p_x \quad (3.89)$$

$$= \text{const.} \stackrel{\text{hier}}{=} 1 \quad (3.90)$$

für das Elektron im momentanen Ruhesystem des Elektrons immer konstant. Damit lassen sich jetzt die Impulse integrieren:

$$x' - x'_0 = \int dt \frac{p'_x}{\gamma} \quad (3.91)$$

$$= \int d\tau p'_x \quad (3.92)$$

$$\stackrel{(3.90)}{=} \int d\phi p'_x \quad (3.93)$$

$$= -\frac{A_0^2}{2\sqrt{16 + 8A_0^2}} \sin 2\phi \quad (3.94)$$

und analog

$$y' - y'_0 = A_0(1 - \cos \phi). \quad (3.95)$$

Gleichungen (3.90) und (3.94) bilden die Vakuummacht.

Kopplung der Vakuumfeldgleichungen

In diesem Teil des Programmes wird die Kopplung zwischen den explizit berechneten transversalen Feldern und der Berechnung des longitudinalen elektrischen Feldes herge-

stellt. Wenn man sich die zu lösenden Gleichungen mit der Normierungsfrequenz

$$-j_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_y - \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_y \quad (3.96)$$

$$\tau = \frac{\partial}{\partial x} E_x \quad (3.97)$$

$$\frac{d}{dt} p_x = -(E_x + \frac{p_y}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} A_y) \quad (3.98)$$

$$p_y = A_y \quad (3.99)$$

$$v_x = \frac{p_x}{\gamma} \quad (3.100)$$

$$v_y = \frac{p_y}{\gamma} \quad (3.101)$$

betrachtet, erkennt man, dass der γ -Faktor sowie die Strom- und Ladungsdichte die Gleichungen koppeln.

Da es hier verschiedene mögliche Ansätze gibt, wird hier der beschrieben, welcher letztendlich für die Berechnung benutzt wird.

Denn man muss bei der Berechnung des γ -Faktors darauf achten, dass die p_{x_i} jeweils Teilchenvariablen und die p_{y_j} Variablen sind, die direkt auf dem Gitter berechnet werden (vgl. Abbildung 3.8). Deshalb muss hier einerseits für ein γ , welches auf dem Gitter berechnet wird, jedes Mal der Teilchenimpuls gewichtet werden, wie es auch schon mit dem Ort des Teilchens bei der Berechnung der Ladung auf dem Gitter geschehen ist.

Das Elektron befindet sich zum Zeitpunkt $t = n \cdot \Delta t$ an der Position x . Durch die Regularisierung (3.25) kann man den Anteil des Impulses auf den Zwischengitterpunkten $j + \frac{1}{2}$ und einen mittleren Impuls p_{x,Gr_j} an den Gitterpunkten j selbst berechnen. Damit sind dann alle Größen zur Berechnung eines γ -Faktors γ_j der Gitterpunkte gegeben, mit dem nun die Kräfte auf das Teilchen bestimmt werden können. Anschaulich sind die

Zusammenhänge in Abbildung 3.8 dargestellt und in Gleichungen ausgedrückt ist das

$$F_i^n = W[j]f_j + W[j+1]f_{j+1} \quad (3.102)$$

$$f_j^n = -\frac{p_{y_j}^n}{\gamma_j} B_j^n \quad (3.103)$$

$$\gamma_j = \sqrt{1 + p_{y_j}^2 + \bar{p}_{x,Gr_j}^2} \quad (3.104)$$

$$\bar{p}_{x,Gr_j} = \frac{1}{2}(p_{x,Gr_{j-\frac{1}{2}}} + p_{x,Gr_{j+\frac{1}{2}}}) \quad (3.105)$$

$$p_{x,Gr_{j+\frac{1}{2}}} = W[j]p_x + W[j+1]p_x. \quad (3.106)$$

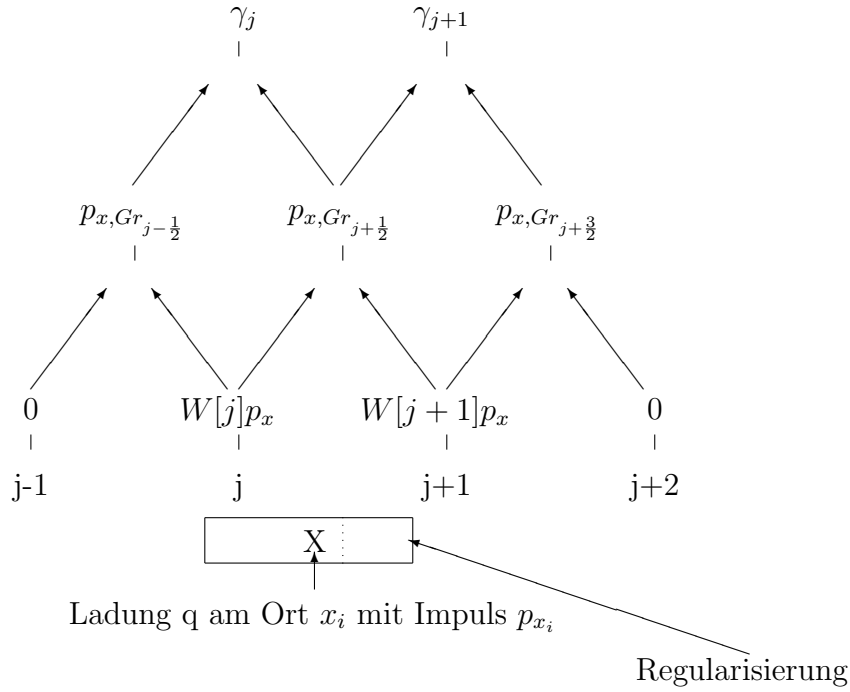


Abbildung 3.8: Berechnung der γ -Faktoren als Gittergrößen. Die Ladungswolke befindet sich am Ort x_i zwischen den Gitterpunkten j und $j+1$. Der Impuls der regulierten Ladung wird den Gitterpunkten gewichtet zugeordnet und daraus werden die Gitterimpulse für die Berechnung der γ Faktoren gebildet.

Simulationsergebnisse

In Abbildung 3.5.3 ist der Zusammenhang zwischen dem transversalen und longitudinalen Impuls aus (3.76) dargestellt. Man erkennt, dass der maximale longitudinale Impuls $p_{x_{\max}}$ wirklich $\frac{1}{2}p_{y_{\max}}$ ist.

Mit den Impulsen kann man mittels (3.100) und (3.101) die Teilchenbahn der Ladung bestimmen. Es wurde eine Lorentztransformation in das mit \bar{v}_0 mitbewegte Bezugssystem gemacht. Die Bahn von Abbildung 3.10 gibt den Zusammenhang von (3.94) und (3.95) wieder.

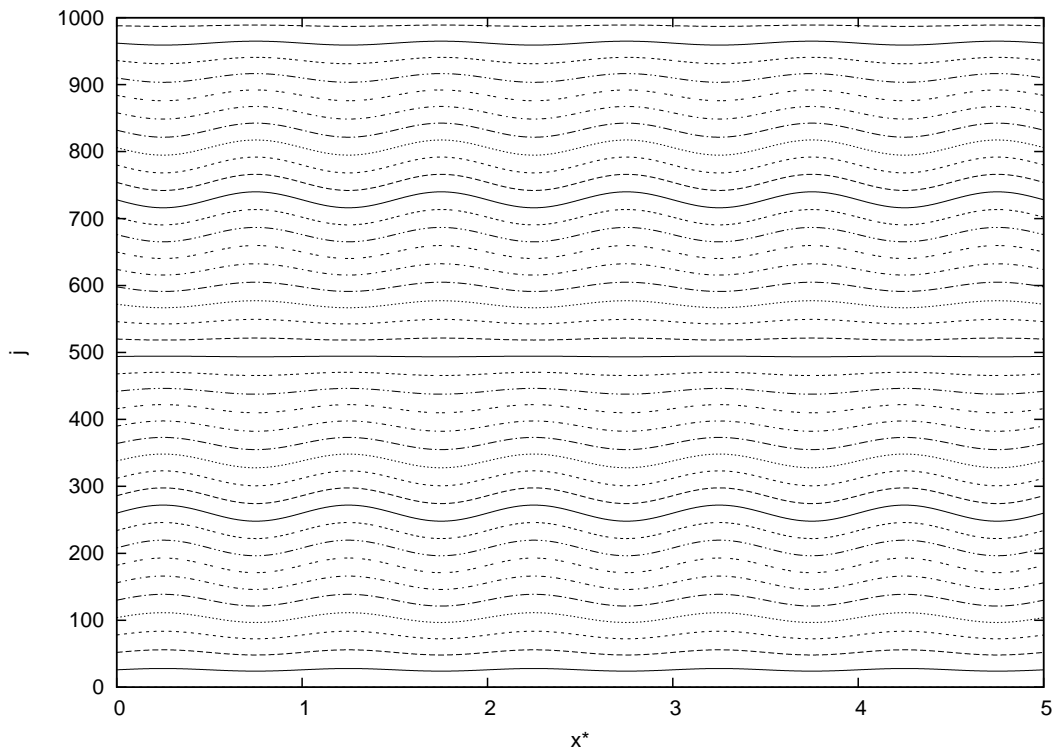


Abbildung 3.7: Simulation einer longitudinalen Plasmawelle: Die Ortsachse ist auf die Plasmafrequenz normiert. Es wurden 2 Teilchen pro Gitterzelle gewählt und die Anfangspulsverteilung der Teilchen am Ort x_i ist $p_x = 0.2 \sin \frac{2\pi}{L} x_i$.

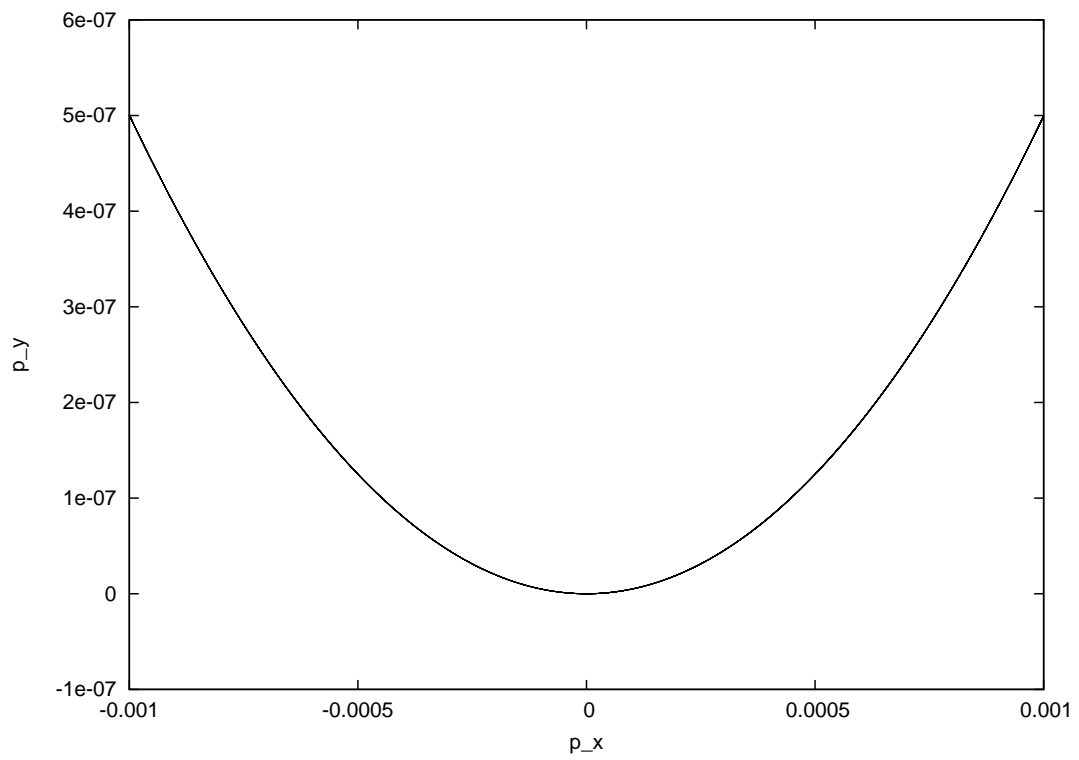


Abbildung 3.9: Quadratischer Zusammenhang zwischen dem longitudinalen Impuls p_x und dem transversalen Impuls p_y (Gleichung (3.79)). Die Amplitude der Anregung ist $A_0 = 0.001$, die Zeit- und Ortsschrittweite ist $\Delta x = \Delta t = .001$.

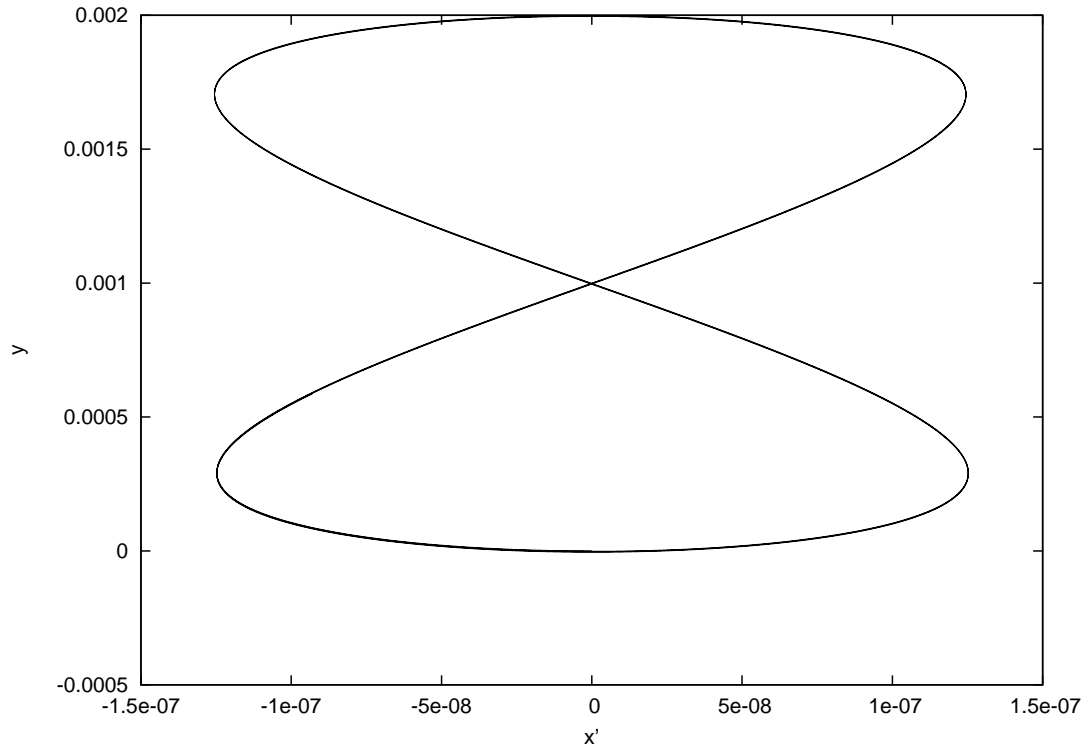


Abbildung 3.10: Teilchenbahn einer negativ geladenen Testladung im Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle im mit \bar{v}_0 mitbewegten Bezugssystem. Für die Parameter der Simulation sind als Amplitude $A_0 = 0.001$ und Zeit- sowie Ortschaftweite $\Delta x = \Delta t = .001$ gewählt worden.

4 Ausbreitung relativistischer Laserpulse

Im letzten Abschnitt wurde eine Kopplung der zu lösenden Differentialgleichungen behandelt. Ab diesem Abschnitt werden die vollen relativistischen Bewegungsgleichungen benutzt, welche nun auch die Rückwirkung durch den Ladungstransport bei der Teilchenbewegung beinhalten. Dies führt zu zusätzlichen Kopplungstermen in den Differentialgleichungen. Es gibt dabei Modulationen der Schwingungsfrequenz des Plasmas. Hervorgerufen werden diese unter anderem durch Dichtemodulationen, ein Effekt der wiederum zu Änderungen der Felder führt.

In diesem Kapitel wird zuerst an Abschnitt 3.5.2 anknüpfend die Propagation eines kurzen Pulses in einem kalten, anfangs homogenen Plasma behandelt. Dabei spielt der Puls die Rolle einer kleinen Störung. Danach werden Plasmawellen untersucht, angeregt durch ebene Wellen in einem unterdichten Plasma.

Im Gegensatz zum vorherigen Kapitel kann man jetzt auch nicht die Feldgleichungen und die Bewegungsgleichungen nacheinander lösen, sondern muss die Gleichungen insgesamt als gekoppeltes Differentialgleichungssystem angehen. Da die Ladungsdichte in diesem Fall nicht mehr als verschwindend zugelassen werden kann, muss auch ein longitudinales elektrisches Feld E berechnet werden.

Es gelten die Gleichungen (3.4) bis (3.8) und es folgt

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = -\vec{E} - \frac{\vec{p}}{\gamma} \times \vec{B} \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\vec{j} \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\rho \quad (4.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \nabla \cdot n\vec{v} = 0. \quad (4.6)$$

Nun wird das Gleichungssystem in das mit der einzelnen Ladung mitbewegte Bezugssystem transformiert und die entstehenden Bewegungsgleichungen behandelt. Dabei können in Ordnungen von $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ u. a. Dispersionsrelationen höherer Ordnung gewonnen werden. Die folgenden Rechnungen orientieren sich an [17], es werden aber direkt die linear polarisierten Wellen mit $p_z = 0$ behandelt.

$$\frac{d}{dt}p_x = -E_x - v_y B_z \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dt}p_y = -E_y - v_x B_z \quad (4.8)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}E_x = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}(nv_x) \quad (4.9)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}B_z - \frac{\partial}{\partial t}E_y = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}nv_y \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_y = -\frac{\partial}{\partial t}B_z \quad (4.11)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}E_z = -\frac{\partial}{\partial t}B_y \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial x}(nv_x) = 0 \quad (4.13)$$

Die folgenden Schritte benutzen wieder die Phase $\phi = \omega t - kx = \frac{1}{v_{Ph}}$ mit der Phasengeschwindigkeit $v_{Ph} = \frac{k}{\omega}$. Für die Ableitungen finden sich folgende Zusammenhänge:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{d\phi} \rightarrow \frac{v_{Ph}}{v_{Ph} - v_x} \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{v_{Ph}}{v_{Ph}\gamma - p_x} \frac{d}{d\tau} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -\frac{1}{v_{Ph}} \frac{d}{d\phi} \rightarrow -\frac{1}{v_{Ph}\gamma - p_x} \frac{d}{d\tau}. \quad (4.15)$$

Dabei ist $\frac{d}{d\tau}$ die Ableitung nach der Zeit im momentanen Bezugssystem des betrachteten Teilchens.

Nun wird das Gleichungssystem im Bezugssystem des Teilchens betrachtet.

$$\frac{d}{d\tau}p_x = -\gamma E_x - p_y B_z \quad (4.16)$$

$$\frac{d}{d\tau}p_y = -\gamma E_y - p_x B_z \quad (4.17)$$

$$-v_{\text{Ph}} \frac{d}{d\tau}E_x = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}(\gamma v_{\text{Ph}} - p_x)nv_x \quad (4.18)$$

$$\frac{d}{d\tau}B_z - v_{\text{Ph}} \frac{d}{d\tau}E_y = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}(\gamma v_{\text{Ph}} - p_x)nv_y \quad (4.19)$$

$$\frac{d}{d\tau}E_y = v_{\text{Ph}} \frac{d}{d\tau}B_z \quad (4.20)$$

$$v_{\text{Ph}} \frac{d}{d\tau}n - \frac{d}{d\tau}(nv_x) = 0 \quad (4.21)$$

Gleichung (4.21) ergibt durch Integration

$$n(v_{\text{Ph}} - v_x) = \text{const.} \quad (4.22)$$

Bei homogenen Plasma mit ruhenden Teilchen folgt

$$n(v_{\text{Ph}} - v_x) = n \quad (4.23)$$

$$\Rightarrow n = \frac{v_{\text{Ph}}}{v_{\text{Ph}} - v_x}. \quad (4.24)$$

Durch Integration von (4.20)

$$E_y = v_{\text{Ph}} B_z. \quad (4.25)$$

(4.24) und (4.25) in (4.18) und (4.19) eingesetzt, ergibt

$$\frac{d}{d\tau}E_x = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}p_x \quad (4.26)$$

$$(v_{\text{Ph}}^2 - 1) \frac{d}{d\tau}B_z = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}v_{\text{Ph}}p_y. \quad (4.27)$$

Setzt man hier wieder $p_x = \frac{d}{d\tau}\xi$, $p_y = \frac{d}{d\tau}\eta$ ein mit $\xi = x - x_0$ und $\eta = y - y_0$, folgt mit der Abkürzung $\sigma^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_{\text{Ph}}}{v_{\text{Ph}}^2 - 1}$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\xi + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\gamma\xi = -\sigma^2\eta \frac{d}{d\tau}\eta \quad (4.28)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\eta + \sigma^2 v_{\text{Ph}}\gamma\eta = \sigma^2\eta \frac{d}{d\tau}\xi. \quad (4.29)$$

Damit erhält man ein System zweier gekoppelter relativistischer harmonischer Oszillatoren.

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\xi + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\gamma\xi = -\sigma^2\eta p_y \quad (4.30)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\eta + \sigma^2(v_{Ph}\gamma - p_x)\eta = 0 \quad (4.31)$$

Jetzt wird die Dispersionsrelation für besonders kleine Plasmadichten $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ll 1$ bestimmt. Die Variable in (4.30), (4.31), welche direkt von $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ abhängt, ist σ . Wenn man $\sigma = \sigma_0^2 + O((\frac{\omega_p^2}{\omega^2})^2) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_{Ph}}{v_{Ph}^2 - 1}$ verwendet und $v_{Ph} = 1 + v_{Ph}^{(1)}(\frac{\omega_p^2}{\omega^2})^2$ als Entwicklung für die Phasengeschwindigkeit benutzt, kommt man in der Ordnung $(\frac{\omega_p^2}{\omega^2})^2$ auf

$$\sigma_0^2(v_{Ph}^2 - 1) = 2v_{Ph}^{(1)}(\frac{\omega_p^2}{\omega^2})^2 = (\frac{\omega_p^2}{\omega^2})^2 v_{Ph}^{(0)^2}. \quad (4.32)$$

Da in nullter Ordnung, bei Annahme einer 2π -periodischen transversalen Schwingung $\sigma_0^2 = \langle \gamma \rangle$ im Bezugssystem der Ladung ist [17], folgt

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v_{Ph}^2} = \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\gamma} \quad (4.33)$$

$$= \omega^2 - \tilde{\omega}_p^2. \quad (4.34)$$

In der letzten Gleichung wurde $\tilde{\omega}_p = \frac{\omega_p^2}{\gamma}$ benutzt, sozusagen eine Plasmafrequenz, die relativistische Massenzunahme berücksichtigt.

4.1 Kurzer, schwacher Puls

Da in 3.5.2 an einem nichtrelativistischen Code gearbeitet wurde, wird hier gezeigt, dass in einem unterdichten Plasma mit $\omega = 10 \cdot \omega_p$ die Dispersionsrelation auch in einem relativistischen Code für kleine Störungen im Plasma gültig ist. In 4.1 ist ein Simulationsergebnis dargestellt, bei dem ein \sin^2 -Puls mit 5 Wellenlängen und $A_0 = 0.01$ durch das Plasma propagiert ist. Man sieht am Ende des Simulationsbereiches 5 Oberschwingungen in der Plasmaschwingung, die von dem Puls herrühren. Man kann sehr gut erkennen, dass die Störung bei der Amplitude so klein ist, dass sie keine Auswirkungen mehr auf die spätere Plasmaschwingung hat. Auch erkennt man, dass hier das Verhältnis zwischen der Wellenlänge der longitudinalen Schwingung λ_{long} und der transversalen Schwingung λ_{trans} , auf die die Ortsachse skaliert worden ist, $\frac{\lambda_{long}}{\lambda_{trans}} = 10$ entspricht.

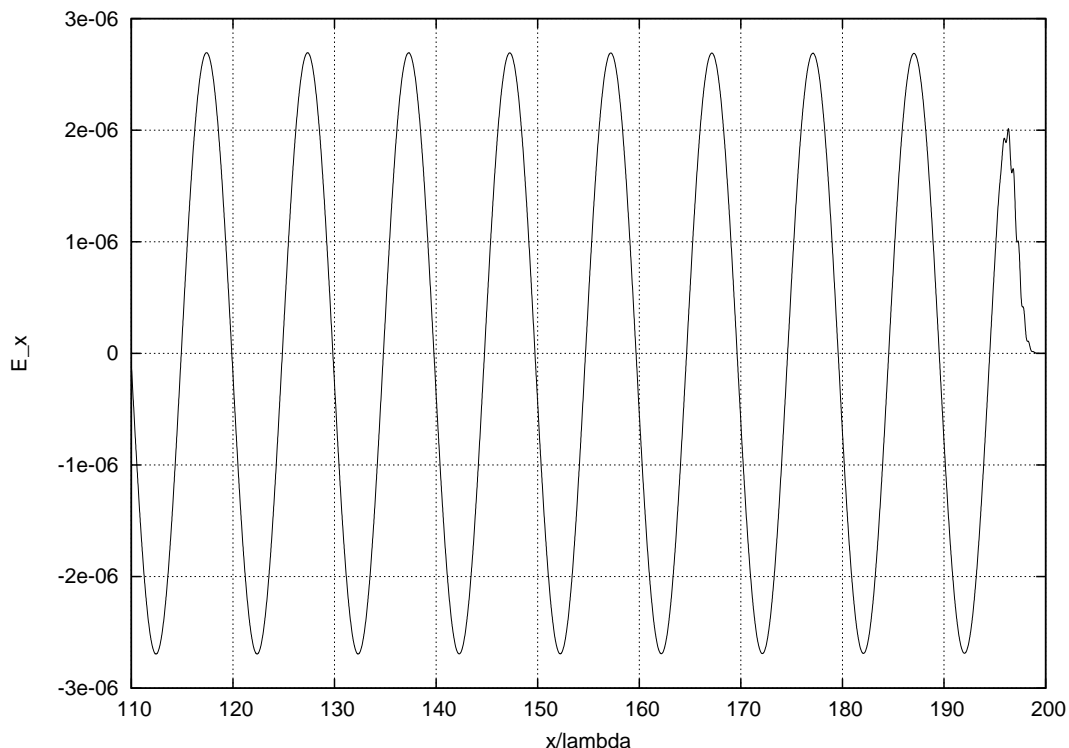


Abbildung 4.1: Longitudinales elektrisches Feld eines Plasmas der Dichte $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.01$ nach Durchgang eines \sin^2 -Pulses der Länge von 5λ , Amplitude $E_0 = 0.01$.

4.2 Anregung von Plasmawellen

In diesem Abschnitt werden Bedingungen untersucht, bei der durch eine geringe Dichte bedingt, das Plasma das angelegte transversale elektrische Feldes E_y nahezu ungestört propagieren lässt. Dabei ist die Plasmafrequenz mit $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.01$ gewählt. Bei jeder im Folgenden beschriebenen Grafik ist die Ortsachse auf die anregende Wellenlänge der transversalen Welle E_y normiert. In den folgenden Situationen ist das Simulationsgebiet anfangs wieder in der Hälfte geteilt. Von 0 bis 100 wird Vakuum vorgegeben und in der anderen Hälfte des Gebietes liegt das homogen verteilte Plasma. Danach propagiert eine Welle von links in das Plasma.

In Abbildung 4.2 ist eine longitudinale Plasmawelle dargestellt, welche durch ein periodisches transversales Feld mit der Amplitude $E_0 = 1$ angeregt wird. Wie man durch das Verhältnis $\frac{\lambda_{\text{long}}}{\lambda_{\text{trans}}} = 11 \pm 3\%$ sieht, ist im Gegensatz zur eben behandelten Störung hier die Wellenlänge größer geworden. Dies lässt sich damit erklären, dass die Plasmafrequenz durch ein größeres durchschnittliches $\bar{\gamma}$ im Laborsystem abnimmt und so eine größere longitudinale Wellenlänge hervorruft. Man erkennt an dem Plot der γ -Faktoren, dass es durchschnittlich zwischen 1 und 1,5 liegt. Jeder Datenpunkt im Diagramm 4.2, der einen γ -Wert angibt gibt gleichzeitig Aufschluss über die Positionen der dazugehörigen Teilchen. In Abbildung 4.2 ist zu erkennen, dass es im Großen nur leichte Dichtemodulationen an den Minima der longitudinalen Schwingung gibt.

Aber sehr interessant sind auch die Oberschwingungen, die auf der longitudinalen Schwingung zu finden sind. Man erkennt in Abbildung 4.4, dass zwei Wellenlängen dieser Oberschwingungen pro transversaler Schwingung existieren. Durch das Potential, welches das transversale Feld aufbaut, sammeln sich Teilchen in den Potentialtälern der transversalen Schwingung. Gut zu erkennen ist das an den Zacken in der Verteilung in der Abbildung 4.2 an den γ -Werten, die immer auf den Wellenbergen und Tälern der transversalen Schwingung sind, was man wiederum in der Vergrößerung (Abbildung 4.4) sieht.

Die großen Werte an der linken Seite von Abbildung 4.2 rühren von Oberflächeneffekten her. Es werden unter anderem auch Teilchen in den Vakuumhalbraum beschleunigt und die Verzerren die Ladungsdichte am Rand.

Bei der dreifachen Amplitude $A_0 = 3$ in Abbildung 4.3 ist das Verhältnis der Plasma- und Anregungswellenlänge mit $\frac{\lambda_{\text{long}}}{\lambda_{\text{trans}}} = 16.75 \pm 2\%$ noch etwas größer. Hier erkennt man, dass die Elektronen in diesem Feld stärker beschleunigt werden als in dem mit der Amplitude $A_0 = 1$ von Abbildung 4.2. Durch die Dichtemodulation, die ja erst E_x hervorruft, gruppieren sich die Elektronen noch stärker, obwohl sie sich durch ihre Ladung eher abstoßen würden. In diesem Fall ist die Welle auch nicht mehr sinusförmig wie bei Abbildung 4.2. Die dichter gepackten Simulationsteilchen verzerren die longitudinale Welle. Man kann auch gut an den Bögen bei der Darstellung von γ sehen, wie Teilchen aufgrund des durch die Plasmawelle entstandenen Potentials beschleunigt werden. Innerhalb einer longitudinalen Plasmaschwingung werden die Teilchen entlang der nach rechts ansteigenden Flanke in die daraus entstehende Potentialmulde nach links gezogen. An dem Anstieg der Schwingung werden sie aufgehalten.

In der Vergrößerung 4.3 nimmt man die Modulation der Teilchendichte durch das transversale Feld noch viel stärker wahr. Dies ist ein Indiz dafür, dass die Einzelteilchen auch im Plasma Bewegungen ausführen, die ähnlich der Bewegung eines einzelnen Elektrons im Vakuum sind.

Da in Abbildung 4.5 die Plasmawelle bei einer Anregung von $E_0 = 10$ fast den gesamten Simulationsraum ausfüllt, ist die Bestimmung des Wellenlängenverhältnisses $\frac{\lambda_{\text{long}}}{\lambda_{\text{trans}}} = 36.8 \pm 3.8\%$ mit einem größeren Fehler behaftet. Man erkennt aber, dass die Plasmawellenlängen mit dem Ansteigen der Amplitude der Anregung und somit auch mit der Bewegungsenergie der Simulationsteilchen stark zunimmt.

Sehr interessant ist es, sich in diesem Zusammenhang die Ausbreitung der Teilchen in das Vakuum in Abbildung 4.6 anzuschauen. Bei der Anregung mit der starken Amplitude werden besonders viele Teilchen aus dem Plasma herausbeschleunigt. Aus den Schattierungen in dem Plot kann man schließen, dass beim Bilden der Plasmawelle die Teilchen in zwei Stößen aus dem Plasma herausgedrückt werden. Es gibt eine Ladungswolke, die sich schon weit nach links bewegt hat. Dann folgen weniger Teilchen. Und anscheinend kommt durch die zweite Plasmawelle ausgelöst die nächste Ladungswolke.

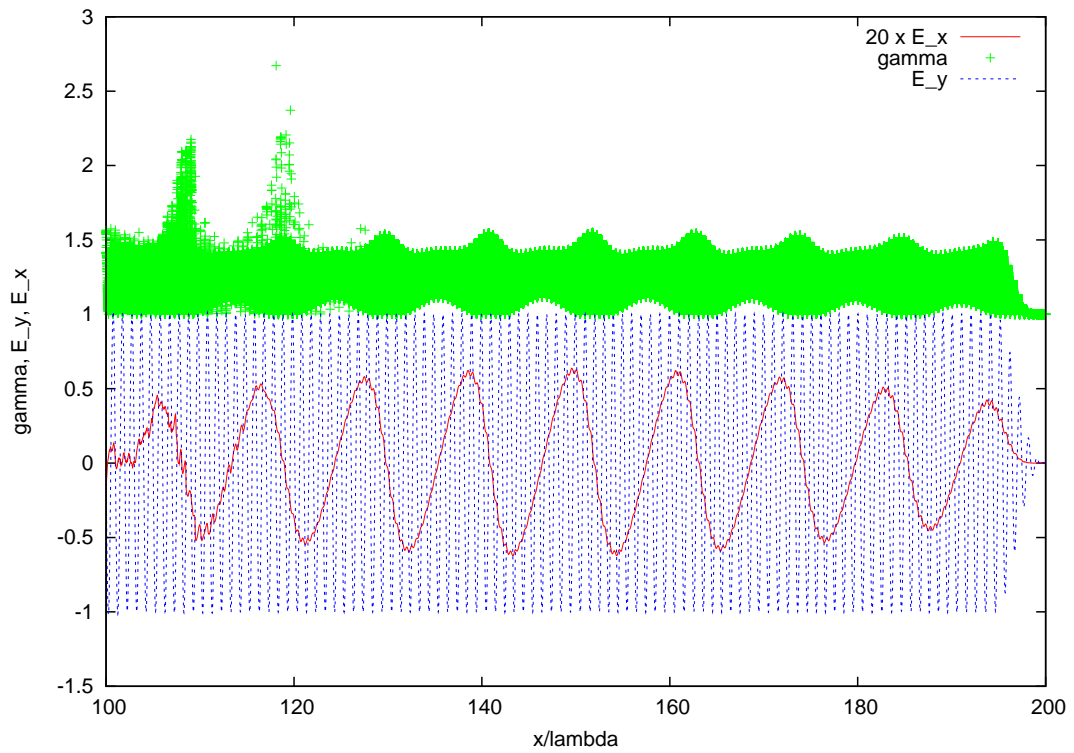


Abbildung 4.2: Longitudinales Feld E_x , transversales E_y und die Teilchenenergien γ . Die Parameter der Simulation sind: Amplitude der Anregung: $E_0 = 1$, $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.01$. Die Ortsachse ist auf die Wellenlänge λ der Anregung normiert.

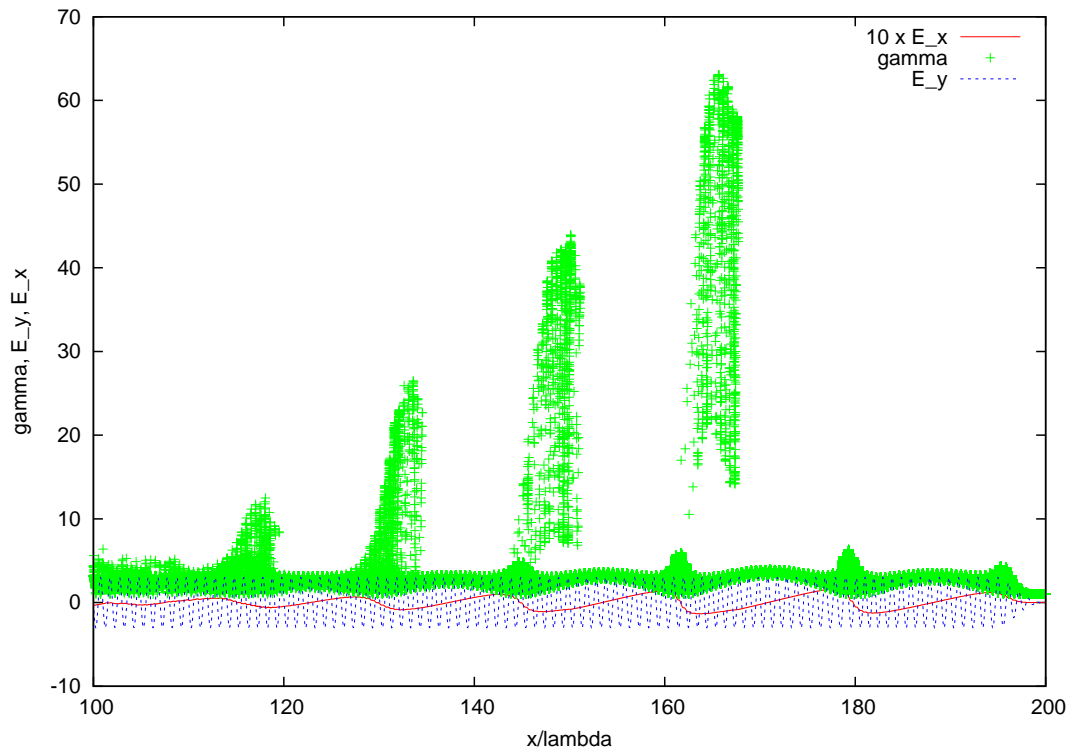


Abbildung 4.3: Longitudinales Feld E_x , transversales E_y und die Teilchenenergien γ . Die Parameter der Simulation sind: Amplitude der Anregung: $E_0 = 3$, $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.01$. Die Ortsachse ist auf die Wellenlänge λ der Anregung normiert.

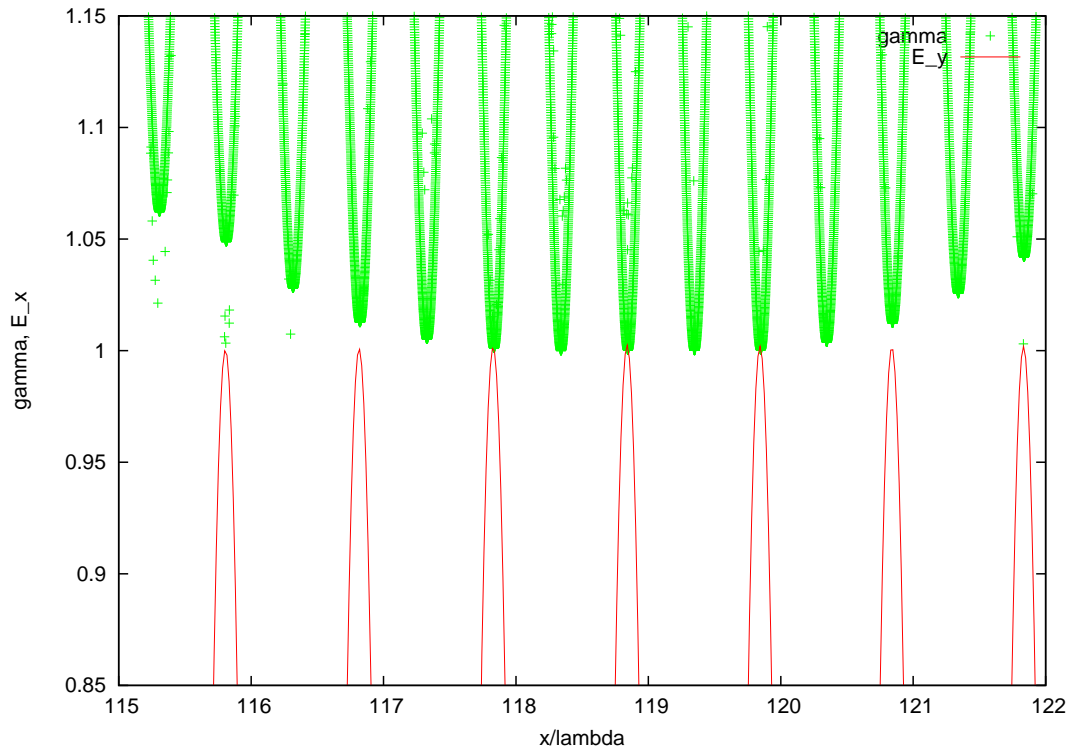


Abbildung 4.4: Transversales E_y mit der maximalen Amplitude $E_0 = 1$ und die Teilchenenergien γ sind dargestellt. Die Wellenlänge der Dichteschwingung ist halb so groß wie die des transversalen Feldes.

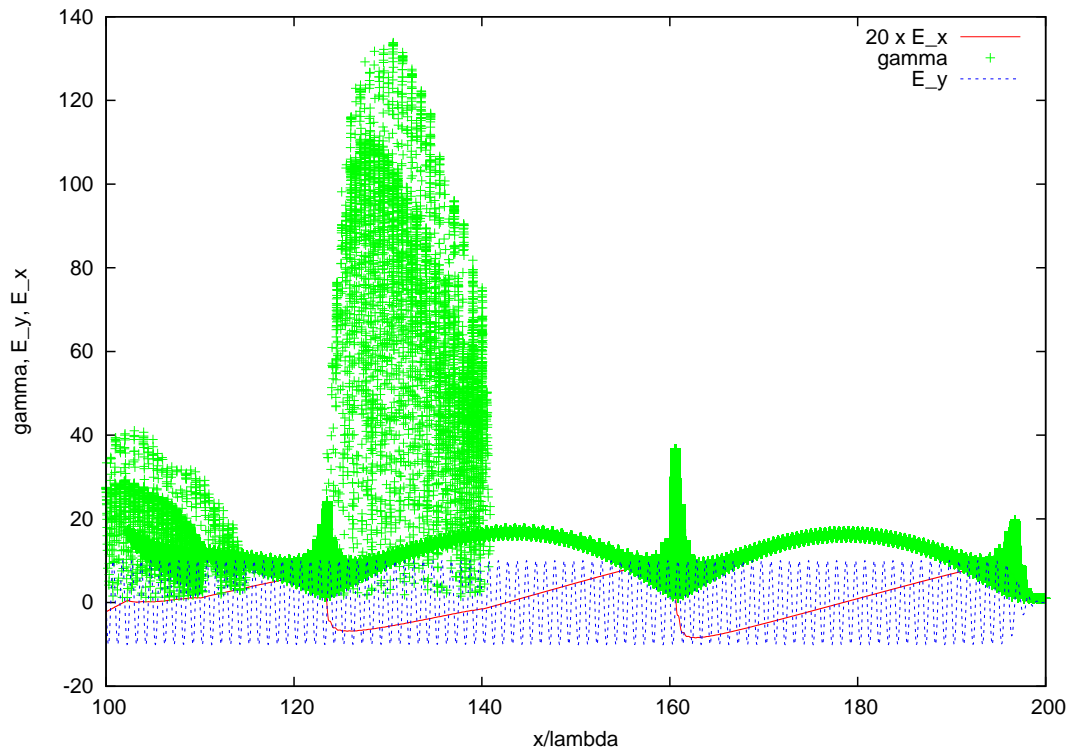


Abbildung 4.5: Longitudinales Feld E_x , transversales E_y und die Teilchenenergien γ . Die Parameter der Simulation sind: Amplitude der Anregung: $E_0 = 10$, $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.01$. Die Ortsachse ist auf die Wellenlänge λ der Anregung normiert.

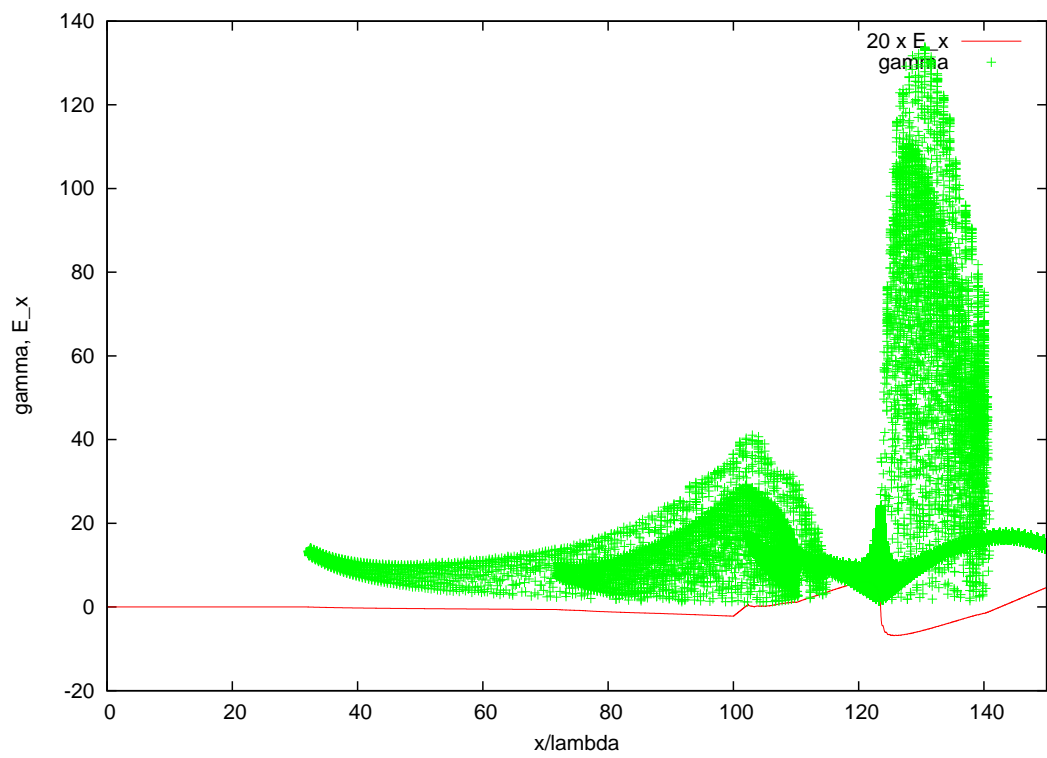


Abbildung 4.6: *Ausbreitung der Plasmateilchen ins Vakuum.*

5 Zusammenfassung

Im ersten Teil dieser Diplomarbeit ist die Propagation von linear polarisierten Pulsen in kalten Plasmen im Bereich der linearen Optik untersucht worden. Dabei wurden einerseits die Propagation von Gauß-Pulsen in der SVE-Näherung und andererseits die Vorläufer von \sin^2 -Pulsen untersucht. Es wurde gezeigt, dass die Entwicklung der Gauß-Funktion für die SVE-Näherung für kurze Pulse nicht mehr gültig ist. Für lange Pulse können aber die Simulationsergebnisse die SVE-Näherung sehr gut bestätigen. Für die Simulation von Wellenausbreitung von langen Pulsen in nichtrelativistischen Plasmen ist sie also mit kleinen Amplituden sehr gut geeignet.

Aufbauend auf diesen Ergebnissen wurde eine Particle-In-Cell Simulation geschrieben. Mit dieser wurde einerseits gezeigt, dass die Dispersionsrelation der linearen Optik für Plasmen transversaler Wellen gilt. Andererseits wurde gezeigt, dass ein Plasma bei kleinen Auslenkungen mit der Plasmafrequenz schwingt.

Besonders wurde die Kopplung der Feld- und relativistischen Bewegungsgleichung an dem PIC-Programm getestet. Analytisch kann man die Gleichungen entkoppeln und die Bahn des Teilchens berechnen. Diese Bahn wurde mit dem PIC-Verfahren reproduziert.

Nun konnte im zweiten Teil dieser Arbeit die Anregung von Plasmaschwingungen eines zunächst homogenen und kalten Plasmas untersucht werden. Hierbei wurden Verhältnisse der Wellenlängen longitudinaler Schwingungen angegeben und es ist die Bewegung von Elektronen in einem Plasma für verschiedene Amplituden beschrieben worden. Es wurde herausgefunden, dass die Dichtemodulationen des Plasmas mit der doppelten Frequenz der Anregung schwingen. Außerdem gibt es starke Dichtemodulationen der Plasmawelle durch die Beschleunigung von Elektronen. Diese werden teilweise so stark beschleunigt, dass sie aus dem Plasma austreten. Die analytische Berechnung dieser Bewegungen ist schwierig, aber die Ergebnisse der Simulation wurden qualitativ mit einer Dispersionsrelation verglichen, welche für kleine Plasmadichten in erster Ordnung in $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ gültig ist.

6 Ausblick

Es wäre wünschenswert diese Arbeit mit der Kopplung auch an die Teilchenströme zu vollenden.

Um genauer auf die Wake-field Phänomene eingehen zu können, wäre eine Analyse mit Pulsen verschiedener Länge und Amplitude sinnvoll. Bei der Beschleunigung von Teilchen aus der Oberfläche des Plasmas heraus sind noch weitere Analysen der zeitlichen Beschleunigung ins Vakuum machbar.

Literaturverzeichnis

- [1] Jasmin Aghassi. Stochastische heizung in particle-in-cell simulationen von plasma-gasentladungen. Master's thesis, RWTH-Aachen, 2003.
- [2] W.F. Ames. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Academic Press Inc., 1992.
- [3] Langdon A. B. Birdsall, C. K. *Plasma Physics via Computer Simulation*. Institute of Physics Publishing, 1995.
- [4] L. Brillouin. Über die fortpflanzung des lichtes in dispergierenden medien. *Ann. d. Phys.*, 44:203–240, 1914.
- [5] Nicolas David. Ausbreitung elektromagnetischer wellen in relativistischen plasmen. Master's thesis, RWTH-Aachen, September 2002. URL http://11p.ilt.fhg.de/skripten/diplom_david.pdf.
- [6] Esarey E. et al. Overview of plasma-based accelerator concepts. *IEEE Trans. Plasma Sci*, 252:252, 1996.
- [7] Robert J. Goldston. *Plasmaphysik*. Vieweg-Lehrbuch Physik. Vieweg, 1998. ISBN 3-528-06884.
- [8] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, Inc., 3rd edition, 1998.
- [9] G. C. Sherman K.E. Oughstun. *Electromagnetic Pulse Propagation in Causal Dielectrics*. Springer-Verlag, 1994.
- [10] Prof. Dr. H.-J. Kull. Plasmaphysik. URL http://11p.ilt.fhg.de/skripten/pp06/pp_profile.pdf. Skriptum zur Vorlesung WS 2006/2007, Januar 2007.
- [11] Lifschitz E. M. Landau L. D. *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Akademie Verlag, 1976.

- [12] Charles K. Langdon A. B., Birdsall. Theory of plasma simulation using finite-size particles. *The Physics of Fluids*, 13(8):2115–2122, 1970.
- [13] V. Malka. Electron acceleration by a wake field forced by an intense ultrashort laser pulse. *Nature*, 298:1596–1600, 2002.
- [14] H. M. Mott-Smith. History of "plasmas". *Nature*, 233:219, 1971.
- [15] Z. Najmudin, M. Tatarakis, K. Krushelnick, E.L. Clark, V. Malka, J. Faure, and A.E. Dangor. Ultra-high-intensity laser propagation through underdense plasma. *Plasma Science, IEEE Transactions on*, 30(1):44–45, Feb 2002. ISSN 0093-3813. doi: 10.1109/TPS.2002.1003915.
- [16] Grischkowsky D. Nikolaus B. 12x pulse compression using optical fibers. *Appl. Phys. Lett.*, 42, 1983.
- [17] Thomas Pesch. Wellen konstanter phasengeschwindigkeit in relativistischen plasmen. Master's thesis, RWTH-Aachen, August 2006. URL http://11p.ilt.fhg.de/skripten/diplom_pesch.pdf.
- [18] A. Pukhov. Strong field interaction of laser radiation. *Reports On Progress In Physics*, 66:47–101, 2003.
- [19] A. Sommerfeld. Über die fortpflanzung des liches in dispergierenden medien. *Ann. d. Physik*, 44:177–202, 1914.
- [20] Mourou G. Strickland D. Compression of amplified chirped optical pulses. *opt. commun.*, 56:219, 1985.
- [21] T. Tajima and J. M. Dawson. Laser electron accelerator. *Phys. Rev. Lett.*, 43(4): 267–270, Jul 1979. doi: 10.1103/PhysRevLett.43.267.

Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen, als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken als solche kenntlich gemacht habe.

Die Diplomarbeit habe ich bisher keinem anderen Prüfungsamt in gleicher oder vergleichbarer Form vorgelegt.

Sie wurde bisher auch nicht veröffentlicht.

Stefan Bollmann

Aachen, den 26. Juni 2006